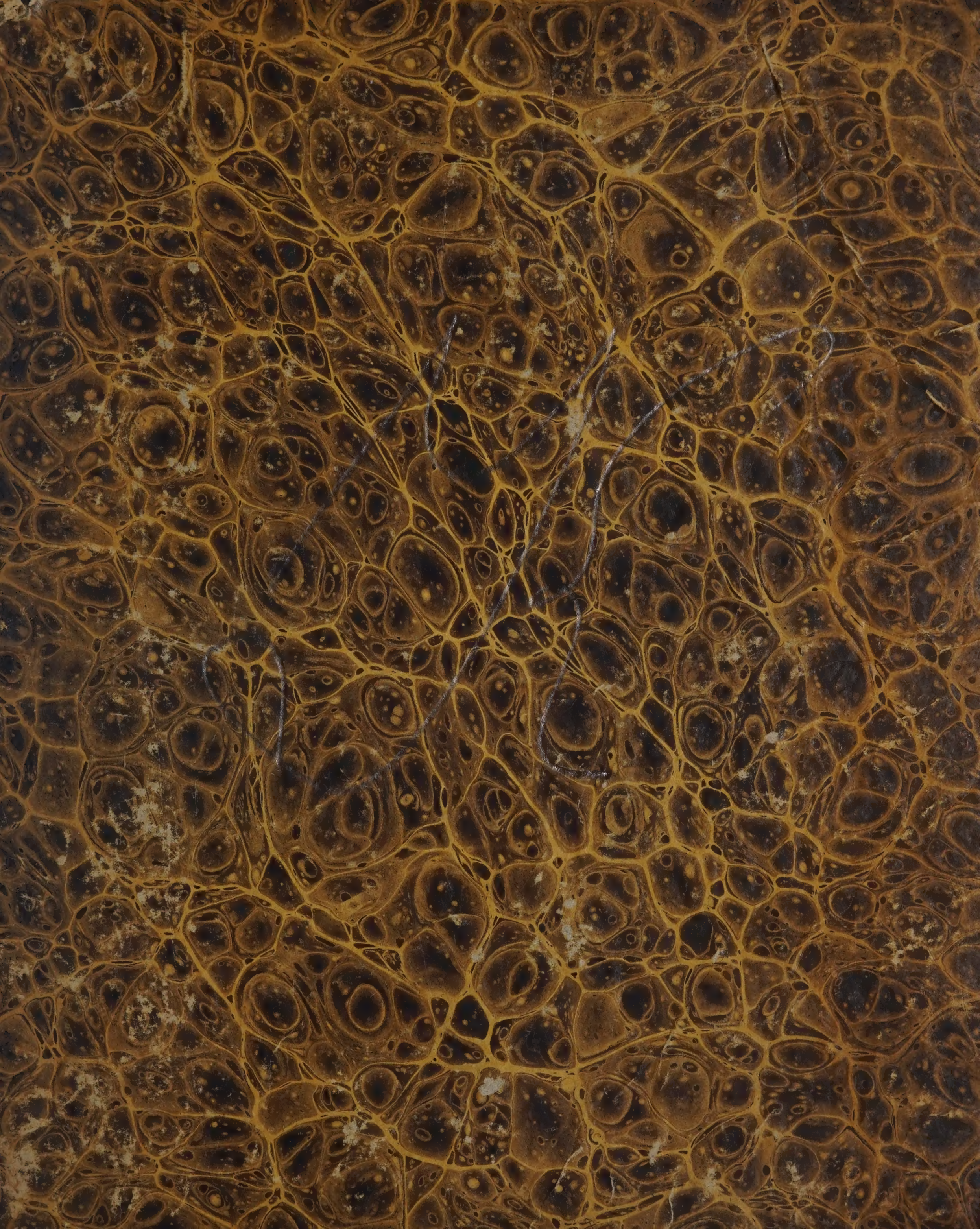
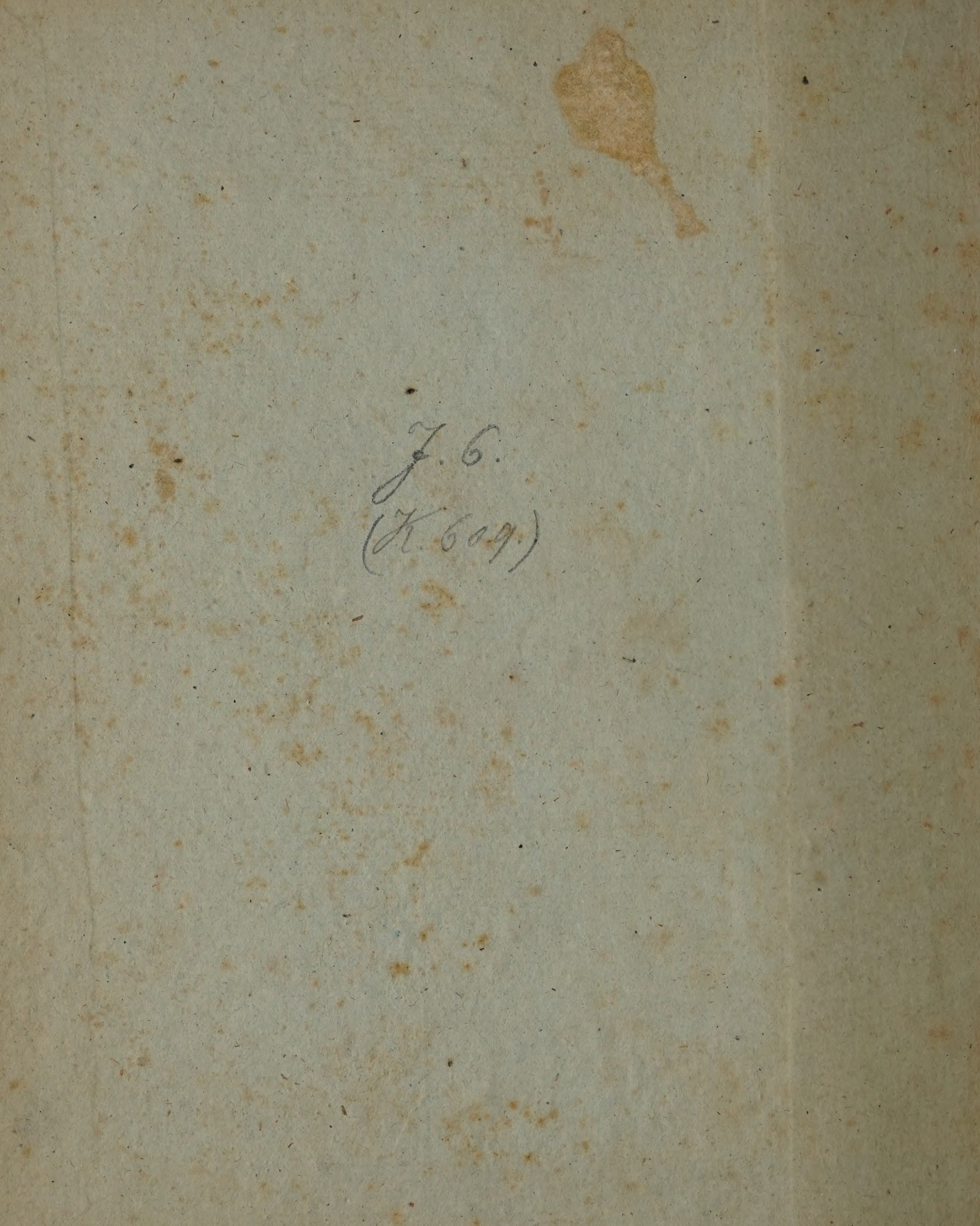
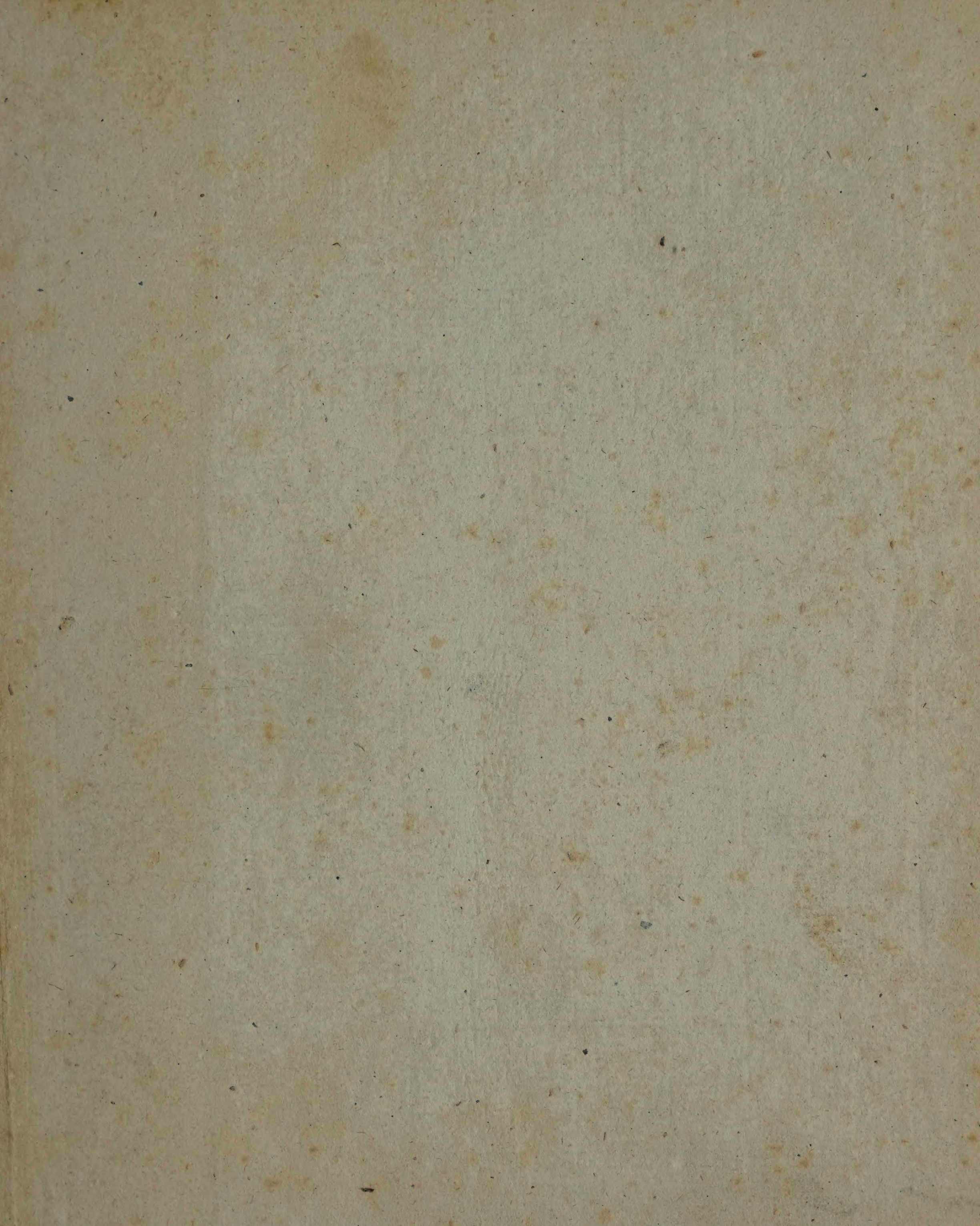
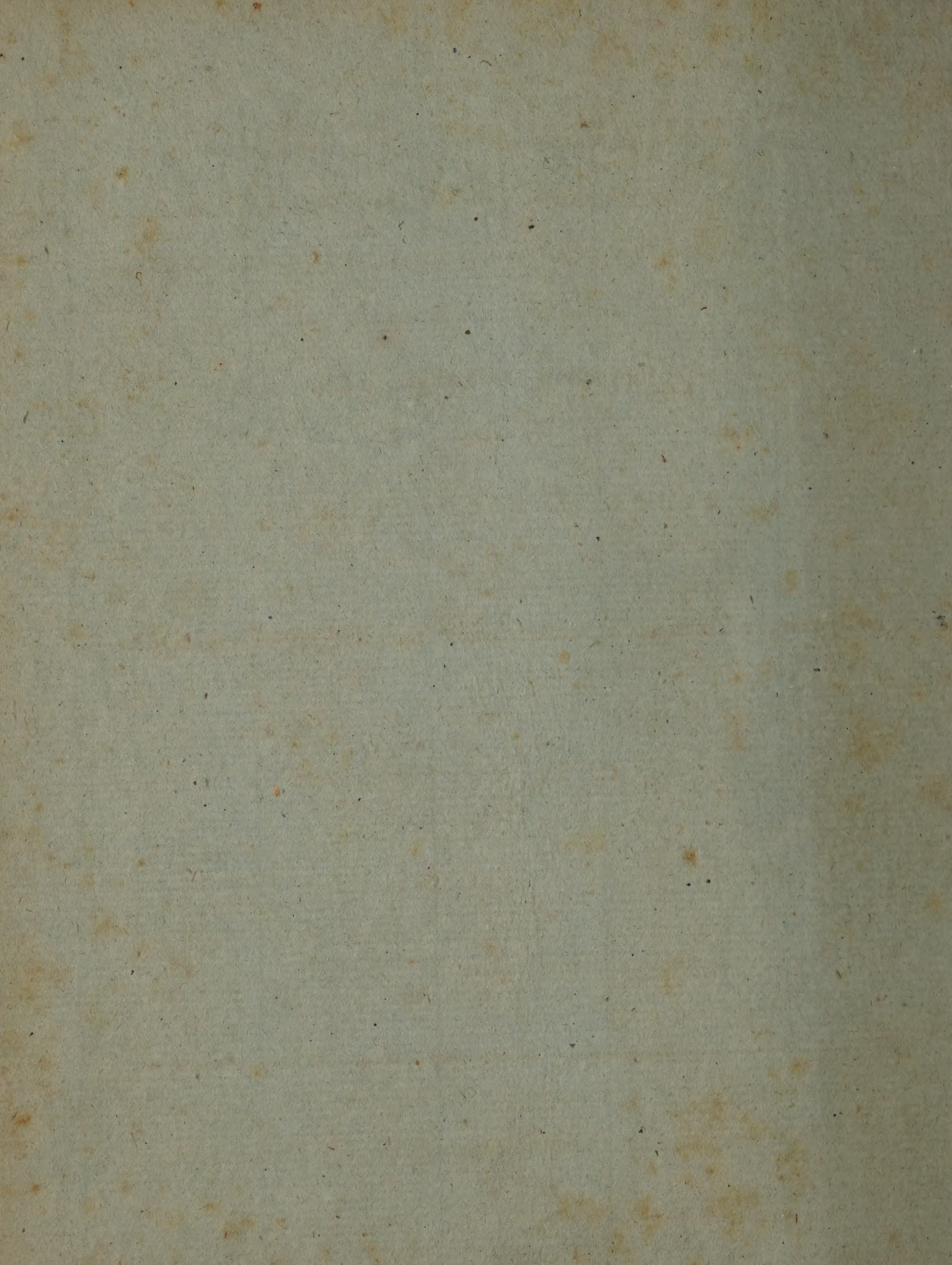



J. 6.
(K. 609.)





Versuch einer Methode,

durch welche sich bestimmen liesse,

ob und in welcher Anzahl eine gegebne allgemeine algebraische Gleichung,

von welchem Grade sie auch sei,

imaginäre Wurzeln habe,

nebst

einer Untersuchung

über die

allgemeine Form völlig entwickelter vielgliedriger Funcktionen,

A. Müttrich.

von

C. H. Kupffer,

Doctor der Philosophie.

Dorpat,

Gedruckt bei J. Chr. Schünmann, Universitätsbuchdrucker.

Ist zu drucken erlaubt worden; jedoch mit der Anweisung, daſs, nach dem Abdrucke und vor dem Debit dieser Schrift, ein Exemplar davon für die Censur-Committee, eins für das Ministerium des öffentlichen Unterrichts, zwei für die öffentliche Kaiserliche Bibliothek, und eins für die Kaiserliche Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, an die Censur-Committee der hiesigen Kaiserlichen Universität eingesandt werden.

Dorpat, den 12. August 1819.

Prof. Dr. W. Struve, Censor.

QA 212 K87 1817

Vorrede.

Die vorliegende Abhandlung schrieb ich als das Resultat meiner Forschungen über die Theorie der Gleichungen, in den Jahren 1814 und 1815 nieder, um eine Probe von meinen Kräften abzulegen. Da die in derselben vorgetragene Methode zur Bestimmung der Anzahl der imaginären Wurzeln jeder allgemeinen algebraischen Gleichung, wenn gleich einer bedeutenden Vervollkommnung, besonders für die Gleichungen von einem geraden Grade, fähig, doch nach meinem Urtheil für alle vorkommende Fälle zureicht, welches, so viel mir bekannt ist, bis jetzt noch Niemand geleistet hat, so ist dieses ein hinreichender Grund, sie durch den Druck bekannt zu machen. Dann durfte aber auch, was ich, durch sie veranlaſst, über die allgemeine Form völlig entwickelter vielgliedriger Funktionen gedacht, als Anhang folgen, indem doch wenigstens der von mir eingeschlagene Weg, um zu derselben zu gelangen, neu seyn könnte. Was die Darstellung betrifft, so schrieb ich, wie es mir natürlich war, wodurch diese Abhandlung ein historischer Umriſs

meiner Bemühungen über ihren Gegenstand wurde. Sie entsprach in dieser Gestalt ihrer ersten Bestimmung und diese ist noch jetzt die Hauptbestimmung derselben, daher die einmal gewählte Darstellung wenigstens bleiben durfte, dann aber auch mufste, weil besondere Umstände es für mich nöthig machten, sie jetzt, ohne dafs ich darauf vorbereitet gewesen wäre, drucken zu lassen, so dafs ich zu einer vollständigern Bearbeitung nicht Zeit genug gehabt hätte. Und seit 1815 beschäftigte mich ein Wirkungskreis, in welchem mathematische Speculationen mir hinderlich gewesen wären. Dafs ich aber mit Sorgfalt geschrieben und dadurch die dem geneigten Leser schuldige Achtung beobachtet habe, hoffe ich, wird Derselbe mir nicht absprechen, so wie ich auch hoffe, der Gang meiner Untersuchung, welche sich auf die geometrische Betrachtung gründet, wird sich Ihm, wenn Er diese allenthalben, auch wo ich sie durch hinzugefügte Figuren nicht angedeutet habe, durch eigne Verzeichnung zu Hülfe nimmt, deutlich entfalten.

Geschrieben im August 1819.

Inhalt.

Einleitung.

Wenn man den Ausdruck, der in einer algebraischen Gleichung gleich Null gesetzt wird, überhaupt als Funktion einer veränderlichen Gröſse x betrachtet, und dergleichen Funktionen eben so wie die Gleichungen, in Funktionen von höherem und niedrigern Grade eintheilt, so kann man sich vorstellen, daſs alle diese Funktionen, von welchem Grade sie auch sind, aus einer Funktion vom ersten Grade entstehen, indem man dieselbe mit x multiplicirt, dann eine beständige Gröſse hinzufügt, darauf wieder mit x multiplicirt und eine beständige Gröſse addirt, und so fort. Aus dieser Vorstellung der succeſsiven Bildung der Functionen von einem höhern Grade aus denen von einem niedrigern laſsen sich Folgerungen verschiedener Art ziehen. Ich werde hier eine Seite aufnehmen, nehmlich eine Methode zur Bestimmung der Anzahl der reellen und imaginären Wurzeln, die sich in einer beliebigen Gleichung befinden mögen, entwickeln. Die Frage, die ich zu beantworten unternehme, kann auch so gestellt

werden: Wie muſs die Beschaffenheit der Coefficienten seyn, damit eine gegebene Funktion, in der alle vorkommenden Gröſsen als unbestimmt angesehen werden, gleich Null werden könne, und wie oft wird sie, unter gegebnen Begrenzungen der Coefficienten = o werden?

Ich werde die Erörterung dieser Frage in 3 Abschnitte theilen. Der erste wird einen Entwurf der Methode, der 2te eine Anwendung derselben auf die Gleichungen vom zweiten, dritten vierten und fünften Grade enthalten; Der dritte Abschnitt wird die Schwierigkeiten, auf welche man bei den Gleichungen von einem geraden Grade stöſst, beseitigen durch die Beantwortung der Frage: wieviel sind von den reellen Wurzeln positiv, wieviel negativ, wenn die Anzahl der imaginären bekannt ist?

Erster Abschnitt.

Entwurf der Methode.

§. 1.

Der Gedanke, daſs, wenn alle Wurzeln einer Gleichung möglich sind, die Maxima und Minima abwechselnd positiv und negativ werden, ist so natürlich, daſs man auch schon lange darauf verfiel, die Anzahl reeller und imaginärer Wurzeln aus der Ordnung der Zeichen, in welcher sich die Maxima und Minima folgen, zu bestimmen. Es kam also darauf an diese Ordnung ausfindig zu machen. *De Gua* hat ein dahin gehöriges Criterium gefunden, aus dem sich, ohne die Auflösung der Gleichungen vorauszusetzen, entscheiden läſst, ob die Zeichen abwechselnd positiv und negativ sind, folglich ob in der vorgelegten Gleichung alle Wurzeln möglich sind; sind aber imaginäre vorhanden, so läſst sich aus der von ihm bekannt gemachten Methode die Anzahl derselben nicht bestimmen; er sagt auch selbst: er sehe nicht ein, obgleich er reiflich hierüber nachgedacht habe, wie sich diese Anzahl ohne eine allgemeine Auflösungsmethode der Gleichungen auf eine allgemeine Art bestimmen lasse.

La Grange führte eine neue Idee auf die Bahn. Er leitet nehmlich aus der vorgelegten Gleichung eine Gleichung der Quadrate der Differenzen der Wurzeln her und zeigt, wie man aus dieser auf die gesuchte Anzahl der imaginären Wurzeln schlieſsen könne. Seine Methode führt allerdings weiter, als die von *de Gua*, ist aber auch nicht, wenigstens in ihrer dermaligen Gestalt, von allgemeiner Anwendung und hat überdem den Fehler (so wie die Methode des Herrn *de Gua*) daſs sie auf eine überflüſsige Anzahl von Bedingungsgleichungen führt, ohne einen Fingerzeig zu geben, wie der kleinst-möglichen Anzahl auf die Spur zu kommen ist: so habe ich gefunden, daſs für die Gleichungen vom 5ten Grade 3 hinreichen: nach seiner Methode ergeben sich 10 und es ist nicht leicht, diese auf jene 3 zu reduciren. Die Bestimmung der kleinst-möglichen Anzahl der Bedingungsgleichungen ist aber von Erheblichkeit.

§. 2.

Um den Gegenstand dieser Abhandlung mit möglichster Klarheit zu entwickeln, setze ich fürs erste voraus, daſs alle Maxima und Minima (die ich allgemein mit Y bezeichne) möglich sind, und möglichen Y mögliche Werthe der veränderlichen Gröſse in der vorgelegten Gleichung entsprechen. Kann man ein allgemeines Criterium angeben, aus welchem sich das Gesetz (und zwar in jedem Fall) nach welchem die Zeichen der aufeinanderfolgenden Y sich richten, entscheiden läſst, so ist alle Schwierigkeit gehoben. Hinge dieses Gesetz blos von der Anzahl der positiven und der negativen Y ab, so dürfte man nur eine Gleichung für Y ableiten und untersuchen wieviel positive und wieviel negative Wurzeln dieselbe hat. Ich bemerke nun, daſs so wie mehrere Y von einerlei Zeichen auf einander folgen, deren Anzahl wenigstens 3 oder eine gröſsere ungerade Zahl

seyn müſse; nur die beiden ersten und beiden letzten sind davon ausgenommen; die letzten immer, wenn sie positiv; die ersten, wenn sie positiv oder negativ, je nachdem der Exponent der Gleichung gerade oder ungerade ist: man stelle sich daher vor, als stehe bei Gleichungen von einem geraden Exponenten noch ein positives, von einem ungeraden noch ein negatives Y vor dem ersten, und als folge auf das letzte immer noch ein positives Y, so daſs man folgende 2 Schemate für die Ordnung der Zeichen der Y entwerfen kann:

I. für einen geraden Exponenten

$+ \mp \pm \mp \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \mp \pm \mp +$

II. für einen ungeraden Exponenten

$- \pm \mp \pm \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \mp \pm \mp +$

Jetzt kann man den allgemeinen Grundsatz aufstellen: *wenn mehrere gleiche Zeichen nach diesem Schema auf einander folgen, so kann ihre Anzahl nur ungerade und nicht kleiner als 3 seyn, und jeder Folge entspricht eine unmögliche Wurzel.*

Nun sind, wenn die Zahl der positiven und die der negativen Zeichen gegeben sind, verschiedne Fälle möglich, deren Beschaffenheit und Menge sich jederzeit aus jenen Zahlen wird bestimmen lassen. Sind demnach a positive, b negative Zeichen vorhanden; setzt man ferner die erwähnte Beschaffenheit d. h. die Anzahl der unmöglichen Wurzeln (oder möglichen, denn beide stehen in unmittelbarer Beziehung auf einander) der vorgelegten Gleichung $= \mu$, die Zahl der möglichen Fälle $=$ n, so wird μ n Werthe haben können, wenn man nur die Zahlen a, b beachtet. Aber einer kann doch nur wirklich Statt haben; es muſs also ein Criterium angegeben werden, nach welchem alle übrigen, die nicht Statt haben, ausgeschlossen werden können. Wie nun dieses Criterium finden?

§. 3.

Es sey eine Gleichnng vom Grade $(m + 1)$

$$x^{m+1} + A x^{m} + B x^{m-1} \;\ldots\ldots\; + T = 0; \quad (1)$$

gegeben. Ihr entspreche folgende krumme Linie (Fig. 1)

Wodurch mehrt sich die Zahl der möglichen Fälle, oder wodurch wird n gröſser als 1? Nur weil bei derselben Anzahl der positiven und der negativen Y eine Absciſsenlinie denkbar ist, die die krumme Linie dergestalt schneidet, daſs die Endpunkte i der qten, $(q + 3)^{ten}$, $(q + 6)^{ten}$, $(q + 9)^{ten}$ überhaupt $(q + 3\,k)^{ten}$ Y entweder regelmäſsig abwechselnd zuerst oberhalb und dann unterhalb derselben fallen, oder umgekehrt, oder bei einigen Paaren das eine, bei andern das andere Statt findet. Es kommt also alles auf die Bestimmung dieser Ordnung, die ich mit $\mathfrak{V}$ bezeichnen will, an. Sie ist das gesuchte Criterium. Mit einem Wort: die Anzahl der Folgen und Abwechselungen der Y, also auch der imaginären Wurzeln wird durch a, b und $\mathfrak{V}$ völlig bestimmt. Die Frage ist also, in welcher Ordnung sind die oben genannten Punkte i vertheilt, oder wie läſst sich $\mathfrak{V}$ bestimmen? Siehe Fig. 2.

Man habe eine Gleichung $X' = 0$ vom Grade m, in der 0, 4, 8, 12 überhaupt 4 k imaginäre Wurzeln sind: der Anfangspunkt der Absciſsen sey zwischen dem ersten und letzten Y enthalten; man erhöhe X' um einen Grad, indem man mit x multiplicirt und addire T; der so erhaltene Ausdruck sey derselbe, den ich mit (1) bezeichnet habe: hieraus sieht man, wie $\mathfrak{V}$ von X' abhängt, wenn in (1) das beständige Glied $= 0$ ist und der Anfangspunkt die erforderliche Lage hat; da nun durch Hinzufügung der beständigen Gröſse die Natur der krummen Linie nicht geändert wird, so läſst sich $\mathfrak{V}$ aus X' bestimmen, wofern in (1) der Anfangspunkt der Absciſsen vorher gehörig bestimmt ist. Hat man also eine Gleichung, wie (1) vom Grade $m + 1$

zu beurtheilen, so setze man $x = y + p'$, bestimme p' so, daſs, wenn man das letzte beständige Glied abzieht und dann durch y dividirt, die so erhaltene Gleichung 4 k imaginäre Wurzeln habe, wo k jede ganze positive Zahl, o mit eingerechnet, bedeuten kann; alsdann ist μ für den Grad $m + 1$ durch a, b u. k völlig bestimmt; k aber kann auch jederzeit bestimmt werden, indem man, weiter fortſahrend immer auf eine Gleichung von einem niedrigern Grade kommt.

Wird es immer möglich seyn p' auf die gefoderte Art zu bestimmen, nehmlich daſs $X' = o$ entweder keine oder nur 4, 8, 12, 4 k imaginäre Wurzeln habe? Siehe Fig. 3.

Man denke sich durch jeden Punkt i eine der Abſciſse paralleel gezogene Linie a, a′, a″, a‴ . .; jetzt denke man sich den Anfangspunkt der Abſciſsen (durch die Substitution von $y + p'$ statt x) so geändert, daſs für $y = o$ der Endpunkt der entsprechenden Ordinate zwischen die am wenigsten von einander entfernten Linien a, a′ . . . falle; da dieses nun immer möglich ist und bei dieser Bestimmung von p', wenn man sich nun die Entstehung von (1) denkt, a, b nicht anders dieselben verbleiben können, als wenn auch die oben gefoderte Bestimmung von p' möglich ist, so folgt daraus, daſs sich p' stets auf die gefoderte Art bestimmen laſse.

K.

a. a′.

a. b.

§. 4.

Aus den vorhergehenden Betrachtungen flieſst folgende Methode zur Bestimmung der Anzahl reeller und imaginärer Wurzeln einer gegebnen Gleichung.

Es sey eine Gleichung $X = o$, nehmlich

$$x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} + C x^{m-3} \ldots \ldots + T = o$$

gegeben.

I. *Man entwickele aus den Coefficienten* A, B . . . *eine Gleichung für* Y, folgendermaſsen: Man bezeichne die Wurzeln

von $\frac{dX}{dx} = o$ mit ξ; die Summen von ξ und deren Combinationen sind durch die Coefficienten gegeben; man setze $\Sigma Y^\nu = \Sigma X^\nu$ und substituire $\Sigma \xi^\nu$ statt Σx^ν und deducire aus den ΣY^ν die Coefficienten der Gleichung für Y.

Aus diesen Coefficienten bestimme man a, b *und daraus die Zahl der möglichen Fälle* n.

II. *Jetzt substituire man, wenn* $n > 1$, *d. h. wenn mehr als 1 Fall denkbar ist,* $y + p'$ *statt* x, *ordne nach* y, *ziehe darauf das beständige Glied ab und dividire durch* y; man erhalte so:

$$y^{m-1} + p' y^{m-2} + q' y^{m-3} \ldots \ldots + w' = o \; (X')$$

Man erhalte für diese die Bedingungen L, M, N . . . . . unter diesen wird sich stets eine L finden, die schon in den Bestimmungen von a, b enthalten ist (welche läſst sich nach dem Geist der Methode leicht entscheiden).

III. Nun ist nur noch übrig p' auf eine schickliche Art zu bestimmen oder wegzuschaffen. *Man nehme für* p' *eine der Wurzeln von* X, *das heisst man elimenire* p' *mittelst* $X = o$.

§. 5.

Ich habe bisher vorausgesetzt:

1) daſs alle Y möglich sind.

2) daſs möglichen Y mögliche Werthe von x entsprechen. Beides ist nicht immer der Fall. Wie nun das Stattfinden oder Nicht Stattfinden dieser beiden Fälle entscheiden?

Fürs erste geht hervor, daſs sich beides aus der Gleichung $\frac{dX}{dx} = o$, auf die in andern Schriften schon gelehrte Art, entscheiden läſst. Ich behaupte aber, daſs man diese bei Gleichungen von einem ungeraden Grade nie zu Hülfe zu nehmen braucht. Die Wahrheit dieser Behauptung wird aus der Anwendung einleuch-

ten. Die Betrachtung dieser Gleichung kann auch bei Gleichungen von einem geraden Grade umgangen werden, nur nicht immer mit Ersparung von Mühe.

Zweiter Abschnitt.

Anwendung der im ersten Abschnitt entworfenen Methode auf die Gleichungen vom zweiten, dritten, vierten und fünften Grade.

§. 1.

Es liegt im Geist meiner Methode vom niedrigsten Grade anzufangen, daher schicke ich als Fundamentalgleichung aller folgenden eine Gleichung vom ersten Grade voraus. Da auf dieser alle folgende Gleichungen von höhern Graden beruhen, so mache ich in diesem Paragraphen als dem Fundament aller Folgenden mit Willen keine Voraussetzung, selbst die nicht, daſs die Coefficienten und das beständige Glied möglich sind. In den Gleichungen vom 2ten u. höhern Graden werde ich der gewöhnlichen Voraussetzung folgen, daſs nehmlich die Coefficienten und das constante Glied mögliche Gröſsen sind.

Es sey eine Gleichung vom ersten Grade gegeben:

$$x - p = 0 \quad (1)$$

Hier ist nur eine Wurzel und die ist immer möglich, sobald p möglich ist, d. h. so wie p^2 möglich und positiv ist. Daraus folgt, daſs x möglich ist, sobald eine aus (1) hergeleitete Gleichung für x^2 lauter positive und mögliche Wurzeln hat.

Diesem an sich bedeutungslosen Satze muſste hier ein Platz eingeräumt werden, weil er von Einfluſs auf die Folge ist.

§. 2.

Ueber die Gleichungen vom 2ten Grade.

Hier wird die oben mit $X = 0$ bezeichnete Gleichung

$$x^2 - p\,x + q = 0 \qquad (2)$$

Deducirt man mittelst $\frac{dX}{dx} = 0$ eine Gleichung für Y (davon die Bedeutung oben erklärt ist) so erhält man

$$Y + \tfrac{1}{4}\,p^2 - q = 0$$

Hier ist nur ein Fall möglich, nehmlich wenn Y negativ ist, so sind beide Wurzeln möglich; unmöglich sind sie, wenn dieses der Fall nicht ist. Demnach sind beide Wurzeln möglich oder nicht, je nachdem $\frac{1}{4}\,p^2 - q > 0$ oder < 0 ist. Wenn man daher nach dem Gange der Methode noch die oben mit X' bezeichnete Gleichung in Betracht ziehen wollte, so müſste man nur dieselbe Bedingung erhalten oder doch eine in dieser enthaltene. Man setze nun, um X' zu finden $y + p'$ statt x; dieses giebt

$$y^2 + (2\,p' - p)\,y + p'^2 - p\,p' + q$$

Das beständige Glied abgezogen, durch y dividirt und $= 0$ gesetzt giebt

$$y + (2\,p' - p) = 0 \quad (X')$$

y ist möglich, wenn $(2\,p' - p)^2$ möglich und positiv ist, d. h. wenn man p' aus $4\,p'^2 - 4\,p\,p' + p^2 = y^2$ wegschaft, so muſs die erhaltene Gleichung lauter mögliche und positive Wurzeln haben (§. 1). Man nehme, wie oben vorgeschrieben, für p' eine der Wurzeln von (2) d. h. man eliminire p' mittelst $p'^2 - p\,p' + q = 0$. Dadurch erhält man $y^2 = -4\,q + p^2$; daſs $-4\,q + p^2$ möglich ist, versteht sich von selbst, folglich wird gefunden $\frac{1}{4}\,p^2 - q > 0$ wie zuvor, wenn beide Wurzeln möglich sind.

§. 3.

Ueber die Gleichungen vom dritten Grade.

Ich nehme der Kürze wegen an, man habe das zweite Glied weggeschaft, so daſs also $X = 0$ hier bedeutet

$$x^3 + qx - r = 0; \quad (3)$$

Eliminirt man hier mittelst $\frac{dX}{dx} = 0$, so findet man für Y die Gleichung

$$Y^2 + 2rY + r^2 + 4\left(\tfrac{1}{3}q\right)^3 = 0$$

Hier ist, wenn die Zeichen von Y bekannt sind, ebenfalls nur ein Fall denkbar, nehmlich alle Wurzeln in (3) sind möglich, wenn ein Y positiv, eins negativ ist, ein Paar imaginär, wenn dieses nicht der Fall ist; d. h. je nachdem YY' oder $\frac{r^2}{4} + \left(\frac{1}{3}q\right)^3 < 0$ oder > 0.

Weil auch hier nur ein Fall möglich ist, so kann auch hier X' keine neue Bedingungen auſser der gefundenen hergeben. Man deducire nun, um sich davon zu überzeugen, X' von X; $y + p'$ statt x substituirt giebt

$$y^3 + 3p'y^2 + (3p'^2 + q)y + p'^3 + qp' - r$$

woraus man findet $X' =$

$$y^2 + 3p'y + 3p'^2 + q = 0$$

Man nehme für p' eine der Wurzeln von (3). Die Wurzeln dieser Gleichung müſsen nun möglich seyn, wenn (3) lauter mögliche Wurzeln haben soll; von letztern sind hingegen zwei unmöglich, sobald erstere unmöglich sind. Dieses giebt (§. 2) die Bedingung

$$\tfrac{9}{4}p'^2 - 3p'^2 - q > 0$$

oder

$$-\tfrac{3}{4}p'^2 - q = \alpha \quad (I)$$

wo α, welche Wurzel von (3) p' auch bedeute, positiv ist, wenn alle Wurzeln von (3) möglich sind; negativ oder imaginär (nehmlich ein Werth negativ, 2 imaginär) wenn zwei Wurzeln imaginär sind. Da

nun, wenn man in (I) p' eliminirt, α auf den dritten, folglich einen ungeraden Grad mit möglichen Coefficienten steigen muſs, da ferner, wenn imaginäre Wurzeln in (3) vorhanden sind, nur ein Werth von α negativ wird, die beiden andern aber imaginär werden, deren Produkt also positiv ist, so wird das Zeichen des letzten beständigen Gliedes die Bedingung für die Möglichkeit der Wurzeln in (3) seyn. Durch die Elimination erhält man

$$\alpha^3 + \tfrac{3}{2} q \alpha^2 + \tfrac{9}{16} q^2 \alpha + \tfrac{1}{16} q^3 + \tfrac{27}{4.16} r^2 = 0$$

Das letzte Glied muſs negativ oder positiv seyn, je nachdem α lauter positive Werthe, oder einen negativen, d. h. (3) lauter mögliche Wurzeln hat oder nicht; dieses giebt wie oben die Bedingung $\frac{1}{4} r^2 + (\frac{1}{3} q)^3 < \text{oder} > 0$.

Mann kann auch bis auf eine Gleichung vom ersten Grade zurückgehen. Man verfahre zu dem Ende mit $y^2 + 3 p' y + 3 p'^2 + q = 0$ noch nach dem Gange der Methode. Man schaffe der Bequemlichkeit wegen das zweite Glied weg, wodurch man erhält

$$y'^2 - \alpha = 0 \qquad (X_,)$$

Man substituire $y'' + \pi'$, so giebt $X'_, = 0$

$$y + 2 \pi' = 0$$

Für π' eine Wurzel von $X_, = 0$ genommen, giebt wieder $\alpha > 0$, wenn alle Wurzeln möglich seyn sollen.

§. 4.

Ueber die Gleichungen vom vierten Grade.

Hier ist X =

$$x^4 + q x^2 - r x + s = 0 \qquad (4)$$

Erste Auflösung.

Eliminirt man x mittelst $\frac{dX}{dx} = 0$, so erhält man für Y folgende Gleichung

$$Y^3 - P Y^2 + Q Y - R = 0 \qquad (I)$$

wo

$$P = 3s - \tfrac{1}{2} q^2 ; \quad Q = 3s^2 + (\tfrac{1}{2} q)^4 + q (\tfrac{3}{4} r)^2 - s q^2 ;$$
$$R = s (s - \tfrac{1}{4} q^2)^2 + \tfrac{9}{16} r^2 [q (s - \tfrac{q^2}{36}) - \tfrac{3}{16} r^2]$$

Für die Coefficienten von X muſs es eine oder mehrere Bedingungen geben, welche die Grenzlinie zwischen der Möglichkeit und Unmöglichkeit eines oder mehrerer Paare Wurzeln ausmachen. Es kommt nur darauf an diese Grenzlinie zu finden. Jedem Paar Wurzeln entspricht wie bekannt, die allgemeine Form $\alpha \pm \sqrt{\beta}$, wo α, β möglich sind. Ist ein Paar gleicher Wurzeln vorhanden, so verschwindet das Radikal, sind 2 Paar gleicher Wurzeln da, so verschwindet entweder das Radikal oder das Radikal ist in jedem Paar Wurzeln sich gleich; jedes Paar gleicher Wurzeln ist immer möglich, sobald die Y alle möglich sind, und ihnen mögliche Werthe von x entsprechen, unmöglich, so wie das nicht der Fall ist. Demnach ist

1) eine Grenzlinie in der Möglichkeit der Wurzeln von (I) und $\frac{dX}{dx} = 0$ zu suchen.

2) eine zweite Grenzlinie ist in der Gleichheit je zweier Wurzeln zu suchen. Denn waren 2 Paar gleicher Wurzeln in X möglich, so werden, sobald die Coefficienten sich von den dadurch bestimmten Grenzen entfernen, entweder alle 3 Werthe von Y positiv, oder nur ein Werth positiv, oder 2 positiv, oder alle 3 negativ. Im ersten Fall werden alle Wurzeln von X imaginär, im zweiten alle möglich, im dritten und vierten 2 imaginär. Und hiemit sind auch alle denkbaren Fälle erschöpft, wofern Num. 1 schon in Betrachtung gezogen ist. Soviel Paar Wurzeln in (4) gleich werden, soviel Werthe von Y werden $= 0$. Dieses giebt für die Coefficienten 2 Grenzen, nehmlich $R = 0$; und $Q = 0$. Weil durch die Wegschaffung des zweiten Gliedes der Anfangspunkt der Absciſsen so versetzt wird, daſs die Summe aller 4 Wurzeln $= 0$ ist, so kann X nur lauter gleiche und

entgegengesetzte Wurzeln haben, wenn $Q = o$, $R = o$; folglich muſs alsdann auch $r = o$ seyn. (Siehe Fig. 4 und 5). Um nun zu wissen, ob alle Werthe von Y möglich sind oder vielmehr nur ob möglichen Y mögliche Werthe von x entsprechen, weil ersteres eine unmittelbare Folge von letzterem ist, urtheile ich folgendermaſsen: in X werden alle Y möglich seyn und ihnen mögliche Werthe von x entsprechen, wenn dieses in $x^3 + qx$ der Fall ist; dieses kann aber nur seyn, wenn $x^2 + q$ ein negatives Y hat; (Siehe Fig. 6 u. 7) folglich muſs $q < o$ seyn.

$Q = o$ und $R = o$ giebt erstlich $s - \frac{1}{4} q^2 = o$. Durch s wird die Lage der Absciſsenlinie unmittelbar bestimmt; da nun, wenn 2 Paar gleicher Wurzeln vorhanden sind, nur eine Lage der Absciſsenlinie denkbar ist, so muſs es für s nur eine mögliche Grenze geben d. h. die Grenze von s muſs durch eine Gleichung, wo s nur auf den ersten Grad steigt, bestimmt werden können. Um nun zu sehen ob s mehr als einen möglichen Werth habe (denn wenn dieses der Fall wäre, so würde nicht $s - \frac{1}{4} q = o$, sondern diese Gleichung noch mit einer andern multiplicirt die gesuchte Grenze seyn) so dividire man Q und R durch $s - \frac{1}{4} q^2$ und setze $s = \alpha q^2$; man wird so erhalten, wenn man in R für r seinen durch $Q = o$ gegebnen Werth substituirt:

$$\frac{7}{4} \alpha^2 + \frac{67}{3.64} \; o$$

also ist α, folglich auch die andern Werthe von s unmöglich.

Wenn $R > o$, $Q < o$, so sind nothwendig alle 4 Wurzeln möglich, denn alsdann hat (I) nothwendig 2 negative, 1 positive Wurzel: daſs möglichen Y mögliche Werthe von x entsprechen, war durch die Bedingung $q < o$ gegeben: wenn alle Wurzeln imaginär sind, so bleibt R ebenfalls $> o$; demnach kommt es nur noch auf den Werth von s an, ob alle Wurzeln möglich oder unmöglich wer-

den: die Grenze für s muſs so beschaffen seyn, daſs R, wenn s sich um unendlich wenig ändert, sein Zeichen nicht ändere, diese Aenderung möge positiv oder negativ seyn, aber Q, P ihre Zeichen so ändern, daſs, wenn bei einer positiven Aenderung von s alle Werthe von Y positiv wurden, bei einer negativen 2 Werthe von Y negativ werden: $Q = 0$; $R = 0$ gab $s - \frac{1}{4} q^2 = 0$, und dieses ist auch die gesuchte Grenze für s, indem sie die eben gefoderte Beschaffenheit hat, wie leicht zu sehen ist, wenn man s um unendlich wenig ändert. R, $s - \frac{1}{4} q^2$, q entscheiden alle denkbaren Fälle, daher hat man auch hier nicht nöthig X' zu betrachten. Ja, wenn man nicht vorher ausgemacht hat, ob es wenigstens ein Paar möglicher Wurzeln in X giebt, so käme noch eine nene Betrachtung hinzu, nehmlich nicht nur ob die Wurzeln von $X' = 0$ möglich sind, sondern auch ob es mögliche Coefficienten derselben giebt; und dieses gilt von allen Gleichungen von einem geraden Grade. Die daraus entstehenden neuen Schwierigkeiten werde ich im 3ten Abschnitt heben. Hier will ich im Vorbeigehn noch einen andern Weg zeigen, die Anzahl der imag. Wurzeln in den Gleichungen vom 4ten Grade zu bestimmen.

Zweite Auflösung. (Fig. 8)

Wenn alle Wurzeln möglich seyn sollen, so muſs Y positiv, Y', Y'' negativ seyn; d. i. $Y\,Y'\,Y''$ muſs positiv, $Y' + Y''$ negativ seyn. $Y' + Y''$ wird stets negativ, wenn man statt x substituirt $y + p_{,}$, dann y einmal positiv, einmal negativ, sonst gleich nimmt, und beide Werthe, welche X dadurch erhält, addirt, darauf $p_{,}$ und y so bestimmt, daſs diese Summe ein Kleinstes wird. Es muſs demnach erstlich $p_{,}$ so genommen werden, daſs die Funktion

$$2\,[y^4 + (b\,p_{,}^2 + q)\,y^2 + p_{,}^4 + q\,p_{,}^2 - r\,p_{,} + s] \quad \text{(II)}$$

die kleinst-möglichen Werthe gebe; dies geschieht, wenn der Coef-

ficient von y^2 den gröſst-möglichen negativen Werth erhält; dies giebt $p_{,} = o$ und $q < o$. Jetzt muſs y^2 so genommen werden, daſs (II) ein Kleinstes wird; dies giebt $y^2 = -\frac{1}{2}q$. Diesen Werth substituirt giebt:

$$-\frac{1}{4}q^2 + s$$

welche Gröſse demnach negativ seyn muſs, wenn alle Wurzeln möglich seyn sollen.

So erhält man wieder die Bedingungen

$$R,\ s - \frac{1}{4}q^2,\ q.$$

Dritte Auflösung. (Fig. 9 u. 10)

Noch kann folgende Betrachtung dienen, die übrigen Bedingungen zu finden, wenn R bekannt ist. Man zerlege (4) oder X in 2 Theile, nehmlich

$$x^4 + qx^2 + s;\ (1) \text{ und } rx;\ (2)$$

4 Durchschnitte sind überhaupt nur denkbar, wenn $q < o$; wenn $q > o$ so sind nur 2 Durchschnitte von (1) mit irgend einer geraden Linie denkbar. Da in (1) sich nur gerade Potenzen von x befinden, so ändern sich die Ordinaten von beiden Seiten des Anfangspunktes der Absciſsen A gleichmäſsig, daher kann es nur 4 Durchschnitte der beiden Linien, welche (1) und (2) repräsentiren, geben, wenn (1) positive und negative Werthe erhalten kann; dieses kann nur seyn, wenn $\frac{1}{4}q^2 - s > o$; ist dieses nicht der Fall, so kann es gar keinen Durchschnitt geben, denn vermöge $R > o$ giebt es nur 4 oder keinen.

§. 5.

Ueber die Gleichungen vom 5ten Grade.

$X = o$ giebt hier

$$x^5 + qx^3 - rx^2 + sx - t = o;\ (5)$$

Erst bei den Gleichungen vom 5ten Grade reicht man mit den Coefficienten der Gleichung für Y nicht aus, wie man sich entweder

aus der geometrischen Anschauung (Fig. 11 u. 12) oder aus der Anwendung der im ersten Abschnitt §. 2. erklärten Schemate überzeugen kann. Man muſs nothwendig zu X' seine Zuflucht noch nehmen. — Die Gleichung für Y ist hier folgende:

$$Y^4 - P Y^3 + Q Y^2 - R Y + S = o; \quad (I)$$

wo $P = \frac{6}{5} q r - 4 t;$

$$Q = \frac{33}{125} q^2 r^2 - \frac{18}{5} q r t + 6 t^2 + \frac{4 \cdot 27}{5^5} q^5 + \frac{16}{25} q s^2 + \frac{18}{25} r^2 s - \frac{36}{125} q^3 s.$$

$$R = -4 t^3 + \frac{18}{5} q r t^2 + [\frac{72}{5^3} q^3 s - \frac{36}{25} r^2 s - \frac{32}{25} q s^2 - \frac{8 \cdot 27}{5^5} q^5 - \frac{66}{5^3} q r^2] t$$
$$+ \frac{256}{5^4} q^3 r^3 - \frac{576}{5^6} q^6 r - \frac{112}{5^4} q^2 r s^2 + \frac{126}{5^4} q r^3 s + \frac{1224}{5^5} q^4 r s - \frac{108}{5^5} r^5 + \frac{64}{5^3} r s^3$$

$$S = t^4 - \frac{30}{25} q r t^3 + [\frac{33}{5^3} q^2 r^2 + \frac{16}{25} q s^2 + \frac{18}{25} r^2 s - \frac{36}{5^3} q^3 s + \frac{108}{5^5} q^5] t^2$$
$$+ [\frac{576}{5^6} q^6 r + \frac{112}{5^4} q^2 r s^2 - \frac{126}{5^4} q r^3 s + \frac{108}{5^5} r^5 - \frac{64}{5^3} r s^3$$
$$- \frac{1280}{5^5} q^3 r^3 - \frac{2376}{5^5} q^4 r s] t + \frac{3888}{5^6} q^4 r^4 + \frac{1728}{5^8} q^7 r^2$$
$$+ \frac{20716}{5^6} q^3 r^2 s^2 + \frac{7776}{5^6} q^2 r^4 s - \frac{128}{5^5} q^2 s^4 + \frac{144}{5^5} q r^2 s^3$$
$$+ \frac{16}{5^5} q^4 s^3 - \frac{27}{5^5} r^4 s^2 + \frac{256}{5^5} s^5 - \frac{2880}{5^7} q^5 r^2 s$$

Eine nähere Untersuchung der Coefficienten zeigt, daſs 2 aus denselben genommene Ausdrücke hinreichen, um die Zahl der positiven und die der negativen Y zu bestimmen, nehmlich S und $\frac{R}{P}$; indeſsen hat man diese Zahlen nur innerhalb gewisser Grenzen zu wissen nöthig, so daſs S schon hinreichend ist. Wenn alle Wurzeln in (5) oder $X = o$ möglich sind, so sind

1) 2 Werthe von Y positiv, 2 negativ.

2) i fällt zuerst oberhalb, dann unterhalb der Absciſsenlinie.

3) alle Y sind möglich u. ihnen entsprechen mögliche Werthe von x.

Wenn das dritte Statt findet, so ergiebt sich das erste aus den Zeichen der Coefficienten in (I); das 2te aber und zugleich auch das dritte ergiebt sich aus X'.

Wenn 2 Paar Wurzeln von $X = o$ imaginär sind, so sind entweder

1) alle Y von einerlei Zeichen, oder

2) zwei Werthe von Y positiv, zwei negativ, aber i fällt zuerst unterhalb, dann oberhalb der Absciſsenlinie; oder

3) den Y entsprechen unmögliche Werthe von x.

Wenn 2 Wurzeln imaginär, 3 möglich sind, so sind 3 Werthe von Y von einerlei Zeichen, der 4te von entgegengesetztem Zeichen als diese 3.

Wenn alle Wurzeln von (I) von einerlei Zeichen, oder 2 positiv, 2 negativ sind, so ist S in beiden Fällen positiv; ebenfalls wenn in (I) sich imaginäre Wurzeln befinden; $S > o$ giebt daher 2 denkbare Fälle, nehmlich: entweder sind alle Wurzeln von $X = o$ möglich, oder 4 imaginär. Die Zahlen der positiven und negativen Y in engere Grenzen einzuschlieſsen, ist unnöthig, weil, wenn auch bekannt ist, daſs 2 positiv, 2 negativ sind, doch noch immer die 2 Fälle denkbar bleiben, daſs entweder alle Wurzeln möglich oder 4 imaginär sind. Um nun zu entscheiden, welches von beiden Statt findet, deducire man X'. $y + p'$ statt x substituirt giebt

$$y^5 + 5p'y^4 + (10p'^2 + q)y^3 + (10p'^3 + 3q - r)y^2 + (5p'^4 + 3qp'^2 - 2rp' + s)y + p'^5 + qp'^3 - rp'^2 + sp' - t = o$$

Das letzte Glied abgezogen, durch y dividirt und dann das zweite Glied weggeschaft, giebt:

$$z^4 + q'z^2 - r'z + s' = o; \quad (X')$$

$$\text{wo } q' = \tfrac{5}{8}p'^2 + q; \; r' = r - \tfrac{1}{2}qp' - \tfrac{5}{8}p'^3$$

$$s' = \frac{41.5}{4^4}p'^4 + \tfrac{13}{16}qp'^2 - \tfrac{3}{4}rp' + s$$

Man nehme für p' eine der Wurzeln von $X = o$; nun wird $X = o$ lauter mögliche Wurzeln haben, wenn die Wurzeln von X' alle möglich sind. Man bezeichne mit $\overset{+}{Y}$ die zu X' gehörigen

Y, so erhält man außer $S > o$ noch $\overset{4}{Y}\overset{4}{Y}'\overset{4}{Y}'' > o$ $\Sigma\overset{4}{Y}\overset{4}{Y}' < o$ $q' < o$. Nun können, wenn $\overset{4}{Y}\overset{4}{Y}'\overset{4}{Y}'' > o$ nur entweder 4 Wurzeln möglich oder 4 unmöglich seyn; eben dies ist der Fall, wenn $S > o$ ist, demnach ist die Bedingung $\overset{4}{Y}\overset{4}{Y}'\overset{4}{Y}'' > o$ schon in $S > o$ enthalten, fällt also weg. Ferner ist bekannt, daß statt der Bedingung $\Sigma\overset{4}{Y}\overset{4}{Y}' < o$ auch $s' - \frac{1}{4}q'^2 < o$ gebraucht werden kann. Demnach, wenn alle Wurzeln von $X = o$ möglich seyn sollen, sind folgende 3 Bedingungen, und nicht mehr, nöthig.

$$S > o$$
$$s' - \frac{1}{4}q'^2 < o$$
$$q' < o$$

In den beiden letztern befindet sich auch p'; um dieses wegzuschaffen, setze man $s' - \frac{1}{4}q'^2 = \alpha$; $q' = \beta$ und eliminire dann p' mittelst der Gleichung $p'^5 + qp'^3 - rp'^2 + sp' - t = o$. Man wird dadurch für α eine Gleichung vom 5ten Grade erhalten, für β gleichfalls: sie mögen seyn

$$\alpha^5 - \Sigma\alpha.\alpha^4 + \Sigma\alpha\alpha'.\alpha^3 - \Sigma\alpha\alpha'\alpha''.\alpha^2 + \Sigma\alpha\alpha'\alpha''\alpha'''.\alpha - \alpha.\alpha'.\alpha''.\alpha'''.\alpha^{IV} = o$$
$$\beta^5 - \Sigma\beta.\beta^4 + \Sigma\beta\beta'.\beta^3 - \Sigma\beta\beta'\beta''.\beta^2 + \Sigma\beta\beta'\beta''\beta'''.\beta - \beta.\beta'\beta''\beta'''\beta^{V} = o$$

Diese beiden Gleichungen werden lauter negative mögliche Wurzeln haben, wenn in $X = o$ alle möglich sind, eine positive und 4 imaginäre, wenn in $X = o$ 4 imaginäre Wurzeln sind. Das Zeichen des letzten Gliedes in beiden Gleichungen wird anzeigen, welches von beiden Statt findet. Demnach erhält man, wenn alle Wurzeln von $X = o$ möglich sind

$$S > o$$
$$\alpha\alpha'\alpha''\alpha'''\alpha^{IV} < o; \qquad \beta\beta'\beta''\beta'''\beta^{IV} < o$$

Bleibt $S > o$, ändern sich aber die andern Bedingungen beide oder eine, so sind 2 Paar Wurzeln imaginär.

Sind 2 Wurzeln möglich, 2 imaginär, so wird $S < 0$.

Wenn man für q', s' deren Werthe aus X' nimmt, so erhält man

$$\beta = \tfrac{5}{8} p'^2 + q$$

$$\alpha = p'^4 + \tfrac{32}{45} q p'^2 - \tfrac{16}{15} r p' + \frac{64 s - 16 q^2}{45}$$

Daraus p' mittelst $p'^5 + q p'^3 - r p'^2 + s p' - t = 0$ eliminirt, giebt, wenn man $\beta \beta' \beta'' \beta''' \beta^{IV}$ mit C' bezeichnet

$$5^5 . C' = 9 . 8^3 q^5 + 5^2 . 6 s q^3 + 8^2 . 5^3 , r^2 q^2 + 8 . 5^4 s^2 q - 16 . 5^4 . r q t + 5 t^2 \text{*)}$$

Beispiele.

Es seyn die Faktoren einer Gleichung vom 5ten Grade $x^2 + z$, $x^2 + z'$, $x + \alpha$. In dieser werden alle Wurzeln möglich seyn, sobald z, z' negativ; 4 werden imaginär seyn, sobald z und z' positiv sind.

$$(x^2 + z)(x^2 + z')(x + \alpha) = 0 \text{ giebt}$$

$$x^5 + \alpha x^4 + (z + z') x^3 + \alpha (z + z') x^2 + z z' x + \alpha z z' = 0$$

Man setze $\alpha = -1$; $z + z' = -0,1$; $z z' = 0,001$, so daſs z und z' negativ und möglich, folglich auch alle Wurzeln der Gleichung möglich sind. Man erhält so:

$$x^5 - x^4 - 0,1\, x^3 + 0,1\, x^2 + 0,001\, x - 0,001 = 0; \text{ (II)}$$

---

*) $\alpha \alpha' \alpha'' \alpha''' \alpha^{IV}$, wofür ich B setze, in Coefficienten der Gleichung $X = 0$ zu berechnen ist weitläuftig; ich verschiebe diese Rechnung noch, weil ich künftig vielleicht für solche Ausdrücke für die Berechnung bequeme Formeln finde. Ist $r = 0$, so ist
$B = (\mathfrak{A} m^5 - t^2)^2 - \mathfrak{B}^2 c m^{10}$, wo $\mathfrak{A} = L + M + N$; $\mathfrak{B} = H + J$; $L = 1 + e + f + g + h$; $M = [10 + 6e + 3f + g]c$; $N = (5 + e)c^2$; $H = 5 + 4e + 3f + 2g + h$; $J = (10 + 4e + f + c)c$; $e = 2a$; $f = a^2 + 2b$; $g = 2ab$; $h = b^2$; $a = -\frac{45}{16}$; $m = \frac{q}{a}$; $b = \frac{s}{m^2}$; $c = \frac{61}{16} - \frac{64}{45} b$

Das 2te Glied weggeschaft giebt

$$y^5 - 0,5\,y^3 - 0,12\,y^2 + 0,005\,y + 0,00112 = 0; \quad (III)$$

Läſst man zz' ungeändert, und setzt $z + z' = +\,0,1$, so daſs z und z' positiv, folglich 4 Wurzeln imaginär werden, so ändern in (II) der zweite und dritte Coefficient nur ihr Zeichen, daher man erhält

$$x^5 - x^4 + 0,1\,x^3 - 0,1\,x^2 + 0,001\,x - 0,001 = 0;$$

Darin das zweite Glied weggeschaft giebt

$$y^5 - 0,3\,y^3 - 0,2\,y^2 - 0,051\,y - 0,00528 = 0; \quad (IV)$$

Daſs sowohl (III) als (IV) $S > 0$ giebt ist eine zu bekannte Sache; der Ausdruck S befindet sich schon in andern Schriften als daſs die Berechnung davon hier nöthig wäre; aber in $5\,C'$ aus (III) die Werthe der Coefficienten substituirt giebt, wenn man die Decimalstellen auſser Acht läſst:

$$5^5\,C' = -\,116 \pm 1, \ldots \text{ also } < 0$$

Substituirt man statt der Coefficienten deren Werthe aus (IV), so erhält man, wenn man die Decimalstellen auſser Acht läſst:

$$5\,C' = 17 \pm 1 \text{ also } > 0$$

Um nun auch B an die Rechnung zu halten, nehme man $p'^4 + \frac{32}{45}\,q\,p'^2 - \frac{16}{15}\,r\,p' + \frac{64s - 16q^2}{45}$, welches kleiner als 0 werden muſs, wenn man die Werthe der Coefficienten aus (III) nimmt; für p' die Wurzel $\frac{4}{5}$ von (III) gesetzt, giebt

$$p'^4 = 0,4096; \quad \frac{32}{45}\,q\,p'^2 = -\,0,227555\ldots\ldots$$
$$-\,\frac{16}{15}\,r\,p' = -\,0,1024$$
$$\frac{64s - 16q^2}{45} = -\,0,081777\ldots$$
$$-\,0,411733\ldots$$

also $\alpha = -\,0,002133\ldots$ folglich < 0 wie nöthig; die übrigen Wurzeln von (III) sind sämmtlich kleiner als $\frac{4}{5}$, so daſs leicht zu übersehen ist, daſs die übrigen alle negative Werthe für α geben werden, so daſs man also $B < 0$ erhält.

Um α auch in einem entgegengesetzten Fall zu betrachten, setze man $zz' = 0,011$; dann werden 4 Wurzeln unmöglich, wenn $z + z'$ denselben Werth behält; zugleich hat diese Aenderung von z, z' den unmittelbarsten Einfluſs auf das Zeichen von α, wie sich aus der Zusammensetzung der Gleichung abnehmen läſst; man erhält so

$$y^5 - 0,5\,y^3 - 0,12\,y^2 + 0,015\,y - 0,00688 = 0; \quad (V)$$

Die Aenderung von s bringt in dem zu (III) gehörigen Werth von α eine Aenderung hervor, welche $= \frac{64}{45} \cdot 0,01 = 0,01422..$ so daſs man für (V) erhält $\alpha = -0,002133 + 0,01422...$ oder $\alpha = +0,012...$ folglich > 0, wie nöthig, da 4 Wurzeln imaginär sind.

Bemerkungen über die 3 Bedingungsgleichungen, unter denen 4 oder 2 Wurzeln einer Gleichung vom 5ten Grade imaginär werden.

Um zu sehen ob sich die Bedingungen S, B, C' noch simplificiren laſsen, urtheile ich so: wenn 2 Wurzeln imaginär werden, so wird $S < 0$ und dann sind für t vier Grenzen möglich, folglich kann S um keine Dimension erniedrigt werden: werden alle Wurzeln imaginär, so können die Grenzen von t ebenfalls durch eine Gleichung vom 4ten Grade ausgedrückt werden, denn allgemein, wenn die Gestalt der krummen Linie vom 5ten Grade nicht durch eine besondere Bedingung eingeschränkt wird, kann t zwischen den Grenzen b, b' und über die Grenzen a, a' hinaus fallen, Siehe Fig. 13., welchen Begrenzungen eine Linie vom 4ten Grade entsprechen würde, Fig. 14. Also auch die Anzahl der Dimensionen von B kann nicht erniedrigt werden.

Die 3te Bedingung C' entschied blos ob in der Gleichung die Y alle möglich waren, und ihnen mögliche Werthe von x ent-

sprachen; hiezu ist es ganz gleichgültig, welchen Werth t hat, folglich muſs diese Bedingung ohne t dargestellt werden können. Um dieses zu untersuchen, frage ich erstlich: sind in der Gleichung: $x^5 + qx^3 - rx^2 + sx = y$ (1) alle *Y* möglich, und entsprechen ihnen mögliche Werthe von x, wenn dieses der Fall für

$$x^4 + qx^2 - rx + s = y' \quad (2)$$

ist? Wahr ist es, wenn in (2) alle *Y* möglich sind, und denselben mögliche Werthe von x entsprechen, daſs alsdann auch in (1) alle *Y* möglich seyn und ihnen mögliche Werthe von x entsprechen werden, wofern nur s die hiezu erforderlichen Grenzen nicht übersteigt. Aber findet dieses in (2) nicht Statt, so folgt daraus noch nicht, daſs dieses in (1) gleichfalls nicht Statt findet. Denn es entspreche der Gleichung (2) die krumme Linie Fig. 15. Ich setze den Fall, daſs y ein Maximum oder Minimum werde, wenn $y' = x$ wird; es sey, wenn x um $-$ z wächst, die Abnahme von $y' = z'$, so kann man setzen $- y = (y' + z)(y' - z') = y'^2 + (z - z') y' - zz'$. Dieses fing dadurch an abzunehmen, daſs $(z - z')^2 y'^2 < z^2 z'^2$ war, es kann daher wieder zu wachsen anfangen, wenn $z^2 z'^2 < (z - z')^2 y'^2$, welches beides bei dieser Gestalt der krummen Linie Statt finden kann ehe $y = o$ wird, so daſs y 4 mal ein Maximum werden kann, obgleich y' nur einmal ein Maximum wurde.

Jetzt stelle ich mir vor, es sey noch keine der Bedingungen, unter denen alle Wurzeln in $X = o$ möglich sind, gefunden. Man nehme mit X die dort gelehrte Verwandlung vor und p' sey wieder willkührlich. Man deducire X'. Man kann nun sagen, alle Wurzeln von X werden möglich seyn:

1) wenn die Gleichung für *Y* 2 positive, 2 negative Wurzeln hat. Die Bedingungen dazu seyn k, l, m ...

2) wenn X' so beschaffen ist, daſs in X nur mögliche Y, denen mögliche Werthe von x entsprechen, entstehen können.

3) wenn X' so beschaffen ist, daſs die zu X gehörigen Y abwechselnd positiv und negativ werden, wozu die Bedingungen a, b, c . . . nöthig seyn mögen.

Jetzt bestimme man p' so, daſs X' eine solche Beschaffenheit erhalte, daſs die Foderung 2, für X Statt finde, wenn eben diese Foderung für X' Statt fand. Es sey die hiezu erforderliche Bedingung C (sie zerfalle nun wieder in mehrere oder nicht). Alsdann kann man sagen: alle Wurzeln von $X = 0$ sind möglich

1) wenn C Statt findet

2) wenn a, b, c . . . k, l, m Statt finden

B und S können (vorausgesetzt daſs C Statt findet) nur Statt haben, wenn a, b . . . k, l, . . . alle Statt haben; demnach hat man die 3 Bedingungen C, B, S. X' wird die gefoderte Beschaffenheit haben, wenn es auf der Absciſsenlinie einen Punkt giebt, von dem aus die Absciſsen gerechnet, gleiche und entgegengesetzte Absciſsen gleiche Ordinaten geben. Dieses ist der Fall wenn $r' = 0$ gesetzt wird, wo dann $q' < 0$ die Bedingung C ist, q' ist $= \frac{5}{8} p'^2 + q$; $r' = \frac{5}{8} p'^3 + \frac{1}{2} q p' - r$; p' mittelst $p'^3 + \frac{4}{5} q p' - \frac{8}{5} r = 0$ eliminirt giebt, nachdem man das Quadrat der beiden ersten Glieder dem des letzten gleich setzt, oder: $p'^6 + \frac{8}{5} q p'^4 + \frac{16}{25} q^2 p'^2 - \frac{8^2}{5^2} r^2 = 0$ setzt $\left(-\frac{8^3}{5^3} + \frac{8^3}{5^3} - \frac{4^2 \cdot 8}{5^3}\right) q^3 - \frac{8^2}{5^2} r^2 =$ dem letzten Gliede der durch die Elimination entstandenen Gleichung:

Daraus erhält man

$$C = \frac{1}{5} q^3 + \frac{1}{2} r^2 < 0$$

Die Entwickelung dieser Bedingung beruht auf der Voraussetzung, daſs nur, wenn X' bei der ihm gegebenen Form lauter mögliche Y hat und diesen mögliche Werthe von x entsprechen, in X

ein Gleiches Statt haben könne. Um die Richtigkeit dieser Voraussetzung (die schon aus der Anschauung einleuchtet, wenn man X aus X′ entstehen läſst) zu prüfen, will ich die Folgen, die daraus flieſsen, betrachten. Hat X′ nicht lauter mögliche Y, oder entsprechen möglichen Y nicht lauter mögliche Werthe von **x**, d. h. wenn $\frac{1}{5} q^3 + \frac{1}{2} r^2 > 0$, so können in X nicht lauter mögliche und möglichen Werthen von **x** entsprechende Y seyn, folglich müſsen in $\frac{dX}{dx} = 0$ wenigstens ein Paar imaginärer Wurzeln seyn; diese befinden sich aber darin gewiſs, wenn $\frac{d^2X}{dx^2} = 0$ imaginäre Wurzeln hat. $\frac{d^2X}{dx^2} = 5.4 x^3 + 3.2 q x - 2 r$ und $x^3 + \frac{3}{10} q x - \frac{1}{10} r = 0$

Hier giebt es 2 unmögliche Wurzeln, wenn

$$\frac{3^3}{10^3} \cdot \frac{q}{3^3} + \frac{1}{4 \cdot 10^2} \cdot r^2 > 0 \text{ d. h. } \frac{1}{5} q^3 + \frac{1}{2} r^2 > 0.$$

q kann gegen r nicht durch eine rationale Gleichung von einem niedrigern Grade, wenn $p = 0$ ist, ausgedrückt werden (indem in diesen Gleichungen die Anzahl der Dimensionen in Rücksicht der Wurzeln in allen Gliedern gleich seyn muſs) folglich kann die Bedingung C auf keine niedrigere Zahl von Dimensionen gebracht werden. Eben so wenig ist eine fernere Simplification von C denkbar, denn q kann gegen r nicht einfacher bestimmt werden. Um auch C durch die Rechnung zu prüfen, setze man darin für q und r deren Werthe aus den numerischen Gleichungen (III) und (IV). Man erhält so aus (III) $C = - 0,0178$, also < 0; aus (IV) $C = + 0,0146$ also > 0.

So hätte ich mich denn mit Hülfe meiner Methode durch die Gleichungen vom 5ten Grade glücklich hindurchgearbeitet und es ist sichtbar, daſs alle Gleichungen vom einem ungeraden Grade sich ihr unterwerfen. Aber die Gleichungen von einem geraden Grade? welche neue Hinderniſse erheben sich hier! Offenbar ist vor allen Dingen die Beantwortung der Frage: wieviel Paare der reellen Wurzeln sind positiv, wieviel negativ, wenn die Zahl der imaginären bekannt

ist? nöthig. Daher ist diesem Gegenstande der dritte Abschnitt gewidmet.

Dritter Abschnitt.

Beantwortung der Frage, wieviel von den reellen Wurzeln positiv und wieviel negativ sind, wenn die Zahl der imaginären bekannt ist.

Aufgabe. 1. Es sey eine Gleichung vom 5ten Grade $X = 0$, welche sey

$$x^5 + q x^3 + r x^2 + s x + t = 0$$

gegeben, in der 3 Y positiv sind, ein Y negativ ist: es ist ersichtlich, daſs nur das 2te oder 4te Y negativ werden kann; man soll bestimmen, welches von beiden der Fall ist, wenn $\frac{dX}{dx} = 0$ zwei negative, zwei positive Wurzeln hat, und t positiv ist. Es wird nehmlich vorausgesetzt, daſs $\frac{dX}{dx} = 0$ lauter reelle Wurzeln hat.

Erste Auflösung.

1. Bemerkbar ist der Unterschied, wie die Tangenten Ai, Ai′ in Fig. 16. und 17. die krumme Linie treffen. In Fig. 16. liegen die Punkte i, i′ so, daſs die Ordinaten für positive unendlich kleine Aenderungen von x auch positive Aenderungen bekommen, in Fig. 17. so, daſs die Ordinaten negative Aenderungen erhalten, wenn x sich positiv ändert. Eine dritte Tangente Ai″ berühret die krumme Linie so, daſs in beiden Figuren die Aenderungen der Ordinaten negativ sind. Bei der 4ten und 5ten Tangente sind die Aenderungen der Ordinaten entweder in beiden Figuren positiv, oder diese Tangenten sind in einer oder beiden Figuren unmöglich. Mit einem Wort für die 3te, 4te und 5te Tangente bleiben die Zeichen der Aenderungen der Ordinaten dieselben, welche von beiden Gestalten der krummen

Linie man auch annehme. Um die den Tangenten entsprechenden Werthe von x zu finden, hat man folgende Gleichung:

$$x : x^5 + q x^3 + r x^2 + s x + t = 1 : 5x^4 + 3qx^2 + 2rx + s$$

oder

$$4x^5 + 2qx^3 + rx^2 - t = 0$$

Wollte man mittelst dieser x aus $\frac{dX}{dx}$ eliminiren, so würde man für $\frac{dX}{dx}$ eine Gleichung vom 5ten Grade erhalten, wo die Auflösung der Aufgabe von der Bestimmung der Zeichen der Wurzeln abhinge; diese Bestimmung aber, wenn sie allgemein seyn soll, ist nicht leichter als die Auflösung der Aufgabe selbst, indem in der Gleichung für $\frac{dX}{dx}$ sich immer zwei imaginäre Wurzeln befinden können. Es kommt darauf an, eine Eliminationsgleichung von einem niedrigern Grade zu erhalten, ohne die wesentlichen Umstände zu ändern. Dann hat die Lösung der Aufgabe weiter keine Schwierigkeit.

2. Man setze statt x, $y + p'$, so erhält man

$$y^5 + 5p'y^4 + (10p'^2 + q)y^3 + (10p'^3 + 3qp' + r)y^2 + (5p'^4 + 3qp'^2 + 2rp' + s)y + p'^5 + qp'^3 + rp'^2 + sp' + t = 0$$

Ich nehme an A Fig. 18. war der Anfangspunkt der Absciſsen: man bestimme nun p' so, daſs A a = p' zu a b d. i. dem der Tangente entsprechenden Werth von y (den ich mit p bezeichne) in einem gegebnen Verhältniſs stehe, und dieses Verhältniſs wähle man so, daſs es an sich, unabhängig von dem Verhalten der Coefficienten von X = o gegeneinander, weniger als 5 Werthe von p gebe, die so mit p' correspondiren, d. h. es sey $p' = zp$ wo z so bestimmt werden muſs, daſs p überhaupt weniger als 5 Werthe habe, wie auch die Coefficienten beschaffen seyn mögen. Für p aber hat man folgende Gleichung

$$4p^5 + 3.5p'p^4 + 2(10p'^2 + q)p^3 + (10p'^3 + 3qp' + r)p^2 - p'^5 - qp'^3 - rp'^2 - sp' - t = 0; \quad \text{(I)}$$

$p' = z\,p$ gesetzt giebt

$$(4+15z+20z^2+10z^3-z^5)\,p^5+(2+3z-z^3)\,qp^3++(1-z^2)$$
$$rp^2-zsp-t=0$$

oder

$$-(z+1)^4(z-4)\,p^5-^2(z+1)^2\,(z-2)\,q\,p^3+(1+z)\,(-z)$$
$$rp^2-zsp-t=0$$

$\frac{dX}{dx}$ wird nun, in y ausgedrückt $=$

$$5y^4+4.5\,zpy^3+3(10z^2p^2+q)y^2+2(10z^3p^3+3qzp+r)\,y+5z^4p^4$$
$$+3qz^2p^2+2rzp+s$$

Hierin statt y den Werth p gesetzt, giebt

$$5(z+1)^4p^4+3(1+z)^2qp^2+2(1+z)rp+s.$$

$z = -1$ gesetzt, giebt für $\frac{dX}{dx}$ nur einen Werth, bei dem es gleichgültig ist, welchen Werth p hat; diese Annahme aber bringt der Auflösung der Aufgabe nicht näher, denn dieser Werth von $\frac{dX}{dx}$ ist unabhängig davon, ob das 2te oder 4te Y negativ ist. $z = 4$ gesetzt giebt für p eine kubische Gleichung, von deren Wurzeln die Auflösung der Aufgabe allerdings abhängt. Hiebei bemerke ich folgendes:

A Fig. 19. sey der Punkt, aus dem die Tangenten gezogen werden, w ein Wendungspunkt: *wenn eine vom Punkte* i, *der zwischen w und der Abscissenlinie liegt, gezogne Tangente die Abscissenlinie in* A *schneidet, so muss es immer einen correspondirenden Punkt* i' *oberhalb* w *geben, der die Abscissenlinie in demselben Punkt* A *schneidet*, denn die oberhalb und unterhalb w gezogenen Tangenten entfernen sich allmählig nach einer Seite von der durch w gezogenen Tangente; folglich giebt es von einem beliebigen Punkte A auf der Abscissenlinie entweder 3 oder nur 1 Tangente zwischen zwei aufeinanderfolgenden Y von entgegengesetzten Zeichen; es giebt deren zwei oder keine, wenn die Y von gleichen Zeichen sind.

Der Anfangspunkt der Abscifsen sey a Fig. 20., die Ordinaten von a bis m seyn positiv; aus i unterhalb w sey eine Tangente i b und die Ordinate i c gezogen, i b schneide a c in einem gegebnen Verhältnifs; *alsdann wird es immer auch über* w *einen Punkt* i′ *geben, von dem eine gezogne Tangente* i′ b′ *die Linie* a c′ (wo c′ den Durchschnitt der Ordinate mit der Abscifsenlinie bedeutet) *in demselben Verhältniss schneiden wird:* denn wenn w B die Tangente durch den Wendungspunkt w bedeutet, w C die Ordinate in diesem Punkt, so werden die Tangenten, welche zwischen der ersten (nämlich der, welche durch den Punkt a geht) und der in w liegen, die Abscifsenlängen a c in allen möglichen Verhältnifsen von o : 1 bis a B : B C schneiden, von w bis zur letzten Tangente, nehmlich der, welche wieder durch a geht, nehmen diese Verhältnifse von a B : B C bis o : 1 (es versteht sich dafs hier nur von positiven Verhältnifsen die Rede ist) wieder ab. Sind zwei aufeinanderfolgende Y wie M N, m n, Fig. 21. von entgegengesetzten Zeichen, so giebt es zwischen denselben nur einen Werth von p, und dieser mufs nothwendig Statt finden: denn t ist nach der Aufgabe positiv, folglich wird das letzte Glied der Gleichung von p

$$p^3 + \frac{3}{10} \frac{r}{q} p^2 + \frac{2}{5^2} \frac{s}{q} p + \frac{t}{2.5^2.q} = 0; \quad (2)$$

negativ, weil q nach der Natur der Aufgabe negativ ist, so dafs diese Gleichung nothwendig wenigstens eine positive Wurzeln hat, folglich ist der i″ entsprechende Werth von p nothwendig möglich, für i giebt es gleichfalls nothwendig einen möglichen Werth von p, folglich kann es zwischen m und M auch nur ein p geben, indem es sonst mehr als 3 Werthe von p geben müfste, welches nach der obigen Bestimmung von z = 4 nicht möglich ist: dieser eine Werth von p wird aber auch nothwendig zwischen M und m fallen, weil innerhalb

v und m das Verhältniß der von den Taugenten geschnittenen Abscißenlängen von $0 : 1$ bis $1 : 0$ zunimmt.

3. Wenn man $z = 4$ setzt und p in $\frac{dX}{dx}$ eliminirt, so ergiebt sich nun folgendes Resultat:

Man erhält für $\frac{dX}{dx}$ eine Gleichung vom 3ten Grade; nennt man diese $P = 0$ so hat

1) $P = 0$ entweder 3 negative Wurzeln, wenn alle Wurzeln von (2) möglich sind, oder in (2) ist ein Paar Wurzeln unmöglich: oder

2) $P = 0$ hat 2 positive und 1 negative, und (2) zugleich nothwendig lauter mögliche Wurzeln. Im Fall 1. ist das 4te Y negativ, im Fall 2. das 2te Y negativ.

Zweite Auflösung.

Man kann die Aufgabe auch lösen, wenn man $z = -1$ setzt, nur hat man dann einen andern Weg einzuschlagen. Zu dem Ende setze ich in (1) x statt p und stelle mir den Anfangspunkt der Abscißen so reducirt vor, daß ein Werth von $x = p$ sey, dann muß sich (1) durch $x - p$ dividiren laßen; nach geschehener Division braucht man die übrigen Werthe von x zur Auflösung der Aufgabe. Aus (1) nachdem x statt p und dann $-p$ statt p' gesetzt worden, wenn man $y + p$ statt x setzt, wird:

$$\left.\begin{array}{l} [5.4p^4 - 4.3.5p^4 + 6.10p^4 + 6qp^2 - 20p^4 - 6qp^2 + 2rp]\,y \\ + \frac{1}{2}[5.4^2p^3 - 4.3^2.5p^3 + 6.20p^3 + 2.6qp - 20p^3 - 6qp + 2r]\,y^2 \\ \quad + \frac{1}{2.3}[5.4.3.4p^2 - 4.3.2.3.5p^2 + 6.20p^2 + 2.6q]\,y^3 \\ \qquad + \frac{1}{2.3.4}[5.4^2\,3.2 - 5.4.3^2.2.]\,py^4 + 4y^5 \end{array}\right\} = 0$$

dieses giebt

$$y^4 + \tfrac{5}{4}py^3 + \tfrac{1}{2}qy^2 + \left(\frac{3qp + r}{4}\right)y + \tfrac{1}{2}rp = 0$$

Statt y seinen Werth in x gesetzt giebt

$$x^4 - \tfrac{11}{4}px^3 + \left(\tfrac{9}{4}p^2 + \tfrac{1}{2}q\right)x^2 - \tfrac{1}{4}[p^3 + qp - r]\,x$$
$$- \tfrac{1}{4}[p^4 + qp^2 - rp] = 0;\ (3)$$

Wird hier $p = \frac{t}{s}$ gesetzt, so ist diese Gleichung nichts anders als die Gleichung (1) durch $x - p$ dividirt, nachdem x statt p, und $p' = -\frac{t}{s}$ (wodurch der vorgeschriebene Anfangspunkt erhalten wird) gesetzt worden.

A Fig. 22 bedeutet den ursprünglichen, a den versetzten Anfangspunkt der Abscissen.

Es sind nun zwei Hauptfälle in der Lage von A zu unterscheiden.

I. Die Ordinate in A schneidet die krumme Linie unterhalb des Wendungspunktes w. Dieses tritt ein, wenn die Gleichung $\frac{d^2 X}{d x^2} = 0$, welche die Lage der Wendungspunkte bestimmt, zwei positive Wurzeln, ein negative hat, welches Statt findet, wenn r positiv ist.

Alsdann sind, *wenn das 4te* Y *positiv ist*, alle Wurzeln von (3) möglich, zwei positiv, zwei negativ und, nachdem in $\frac{d X}{d x}$ x mittelst (3) eliminirt, wird eine Gleichung vom 4ten Grade, die ich mit (4) bezeichne, entstehen, welche 3 positive Wurzeln, 1 negative hat.

Wenn das 2te Y *positiv ist, so sind*

1) alle Wurzeln von (3) möglich, 2 positiv, 2 negativ, aber die Gleichung (4) hat 3 negative Wurzeln, 1 positive. — oder

2) in (3) sind 2 unmögliche Wurzeln. — oder

3) in (4) sind 3 Wurzeln positiv, 1 negativ, aber (3) hat 3 positive Wurzeln und 1 negative.

II. Die Ordinate in A schneidet die krumme Linie oberhalb w oder r ist negativ. Dann würde (3) die Frage nicht immer entscheiden: in diesem Fall mache man r positiv, ohne die Zeichen der Wurzeln von $\frac{d X}{x d} = 0$ zu ändern. Man muſs also X zuerst umformen und dann erst die Gleichung (3) entwickeln (es ist klar, daſs dieses die Entwickelung von (3) nicht hindert, indem es für z immer einen Werth $= -1$ geben muſs, wie auch die Coefficienten beschaffen, und wieviel deren auch seyn mögen, weil durch den Endpunkt der

Ordinate für $x = o$ immer eine Tangente möglich ist, wovon die Gleichung $z + 1 = o$ eine unmittelbare Folge ist). Diese Umformung kann folgendermaſsen bewerkstelliget werden.

Da X lauter mögliche, und möglichen Werthen von x entsprechende Y nach der Aufgabe hatte, so ist $\frac{2}{3}q^3 + r^2 < o$. — Ich setze hier, zur Unterscheidung von der andern Umformung, die auf diese zum Behuf der Entwickelung von (3) folgen muſs, $x = x_, + p_{,}$, wo dann nachher $x' = y + p'$ gesetzt wird. Ich nehme an man erhalte so für $x_,$ die Gleichung

$$x_,^5 + A x_,^4 + B x_,^3 + C x_,^2 + D x_, + E = o$$

Die Foderung ist $p_,$ so zu bestimmen, daſs C und D positiv und A oder B oder beide negativ werden, das heiſst, wenn das Zeichen von B auſser Acht gelassen wird, muſs in den Gleichungen $\frac{dX}{dx} = D$, $\frac{d^2X}{2dx^2} = C$, und $\frac{d^2X}{1.2.3.4\,dx^4} = A$; x negativ und so genommen werden, daſs C und D positive Werthe erhalten. Um dahin zu gelangen nehme ich die geometrische Betrachtung zu Hülfe. Siehe Fig. 23.

Man kann sich vorstellen, daſs dd der Funktion $\frac{dX}{dx}$ entspreche und $d_2 d_2$ der Funktion $\frac{d^2X}{dx^2}$.

In beiden muſs die Absciſsenlinie so liegen, daſs alle Wurzeln von $\frac{dX}{dx} = o$ und $\frac{d^2X}{dx^2} = o$ möglich sind; A, welches, wie vorher, der Anfangspunkt der Absciſsen ist, muſs rechts von m liegen, denn weil r und q beide negativ sind, so hat $\frac{d^2X}{dx^2} = o$ nur eine positive Wurzel; liegt w, der ein Wendungspunkt von dd ist, oberhalb der Absciſsenlinie, so wird ein der Foderung entsprechender Werth von $p_,$ erhalten, wenn dafür eine Wurzel der Gleichung $\frac{d^3X}{dx^3} = o$ genommen wird. Dieses ist aber nicht immer der Fall, daher muſs eine allgemeinere Bestimmung von $p_,$ gesucht werden. Man bezeichne die Ordinaten von dd mit y, alsdann wird die kleinste negative Ab-

scifsenlänge, die $y = \frac{1}{5} s$ macht, der Foderung gewifs entsprechen; dies giebt

$$x^4 + \tfrac{3}{5} q x^2 + \tfrac{2}{5} r x + \tfrac{1}{5} s = \tfrac{1}{5} s$$

oder

$$x^3 + \tfrac{3}{5} q x^2 + \tfrac{2}{5} r = 0; \quad (5)$$

Dieser Gleichung entspreche d′d′. Man könnte, nachdem man alle Bedingungen zwischen A, B, C, D, E so entwickelt hat als wäre A negativ, C positiv, mittelst (5), nachdem darin p, statt x gesetzt worden, p eliminiren; man würde dadurch für jede Bedingung eine Gleichung vom 3ten Grade erhalten, in welcher das Zeichen des letzten beständigen Gliedes die Aufgabe lösen würde. Diese Weitläuftigkeit läfst eine bequemere Bestimmung von p, wünschen.

Zu diesem Ende ist zu erwägen, dafs der absolute Werth von p, kleiner als der absolute Werth der kleinsten negativen Wurzel von (5) seyn darf, wenn er zugleich nur gröfser als der absolute Werth der kleinsten negativen Wurzel von

$$x^3 + \tfrac{3}{10} q x + \tfrac{1}{10} r = 0; \quad (6)$$

ist. Man setze $x = p, = - z \alpha \sqrt{-q}$; $r = \alpha q \sqrt{-q}$ so erhält man aus (5) und (6), wenn man durch die positive Gröfse $-q\sqrt{-q}$ dividirt

$$- z^3 \alpha^3 + \tfrac{3}{5} z \alpha - \tfrac{2}{5} \alpha = 0; \quad [5]$$

$$- z \alpha^3 + \tfrac{3}{10} z \alpha - \tfrac{1}{10} \alpha = 0; \quad [6]$$

Der höchste Werth, den α erreichen kann, ist $+\sqrt{\tfrac{2}{5}}$ und z mufs positiv seyn, weil p, negativ werden soll; man setze $z = \frac{1}{2}$, so mufs seyn, wenn dieser Werth von z brauchbar seyn soll,

$$- \tfrac{1}{8} \alpha^2 - \tfrac{1}{10} = 0 \text{ oder } < 0;$$

und

$$- \tfrac{1}{8} \alpha^2 + \tfrac{1}{20} = 0 \text{ oder } > 0;$$

Beides hat Statt, wenn $\alpha = \frac{2}{5}$ oder $< \frac{2}{5}$ ist; $\frac{1}{2}$, wenn α als be-

stimmt und z als die zu bestimmende Gröſse (wie sie es wirklich sind) betrachtet werden, ist aber auch kleiner als die kleinste Wurzel von [5], denn sonst müſste [5] für einen kleinern und gleichfalls positiven Werth von z einen positiven Werth erhalten können, welches nicht möglich ist, da $\alpha^2 < \frac{2}{5}$. Und daraus folgt unmittelbar, daſs $p_{,} = -\frac{1}{2}\alpha\sqrt{-q}$ kleiner als die kleinste negative Wurzel von (5) der absoluten Gröſse nach sey. Man setze also zum Behuf der Umformung

$$p_{,} = -\sqrt{-\tfrac{1}{4}\alpha^2 q} = -\sqrt{\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{r^2}{q^2}} = -\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{r}{q}\ ;$$

Wird nach dieser Umformung E negativ, so ist das 2te Y nothwendig negativ; bleibt E positiv, so wird mit diesem umgeformten X eben so verfahren wie mit $X = 0$ in I.

Anm. Diese Auflösungen laſsen sich nun auch leicht auf den Fall ausdehnen, wenn in der Aufgabe das 2te Glied nicht fehlt, so wie auch, wenn $\frac{dX}{dx} = 0$ drei negative Wurzeln und 1 positive hat.

Es ist leicht einzusehn, daſs bei den Gleichungen vom 4ten und 5ten Grade die Auflösung der vorstehenden Aufgabe hinreicht, um zu entscheiden, wieviel positive und wieviel negative Wurzeln eine gegebne Gleichung $X = 0$, in der die Zahl der unmöglichen bekannt ist, hat: wenn man ferner bedenkt, daſs einer allgemeinen Anwendung dieser Auflösung nur die zu derselben nöthige Versetzung des Anfangspunktes der Absciſsen im Wege stehen dürfte, so kann man gewiſs behaupten: die Anzahl der positiven und der negativen reellen Wurzeln werde sich stets bestimmen laſsen, wenn die Zahl der unmöglichen bekannt ist, wofern man nur ein Mittel weiſs, den Anfangspunkt der Absciſsen in eine schickliche Lage zu bringen. Diese Schwierigkeit ist aber zu heben. Denn es sey $p_{,}$ die Absciſsenlänge, um welche der Anfangspunkt geändert wird: nun hat ein oder

mehrere von den Wendungspunkten gewiſs die nöthige Lage; $p_{,}$ würde demnach gewiſs durch eine Gleichung von einem niedrigern Grade als der der vorgelegten Gleichung bestimmt werden können: es kommt darauf an zu wiſsen, ob ein Theil der krummen Linie, der eine gewiſse (aus den Bedingungen zur Möglichkeit der Wurzeln oder nach der vorhergehenden Anwendung der Tangenten immer bestimmbare) Gestalt hat, zur rechten oder zur linken des Anfangspunktes liegt; die Bedingungen dieser Gestalt seyn A, B, C . . ., welche Funktionen von $p_{,}$ und den Coefficienten seyn werden: die Frage ist: entstehen diese Bedingungen aus positiven oder aus negativen Werthen von $p_{,}$? wenn man demnach A, B, ... durch $p_{,}$ dividirt und dann $p_{,}$ eliminirt, so werden $\frac{A}{p_{,}}, \frac{B}{p_{,}}, \frac{C}{p_{,}} \ldots\ldots$ durch Gleichungen von einem niedrigern Grade gegeben seyn, als der Grad der vorgelegten Gleichung und dieser Gleichungen mögliche Wurzeln werden durch ihre Zeichen, die nunmehr wiederum, ohne die Wurzeln selbst zu kennen, allgemein durch die Coefficienten bestimmt werden können, anzeigen, ob A, B, C . . . . aus positiven oder aus negativen Werthen von $p_{,}$ entstanden sind. Ferner ist klar, daſs die erste Auflösung der Aufgabe 1. dieses Abschnittes zugleich angewandt werden kann auf die Bestimmung der im ersten Abschnitt §. 3. mit 𝔅 bezeichneten Ordnung der Y, so daſs nun auch bei den Gleichungen von einem geraden Grade jedes Hinderniſs zur Bestimmung der Anzahl der imaginären Wurzeln weggeräumt ist. Die folgende Aufgabe soll dies auſser Zweifel setzen.

Aufgabe 2.

Die krumme Linie e e Fig. 29. gehöre irgend einer Gleichung von einem geraden Grade $X = 0$. Man soll die Ordnung 𝔅 bestimmen.

Auflösung.

Man versetze den Anfangspunkt der Abscissen A (nach Aufg. 1.) nach a zwischen k und l, deducire die Gleichung für p und eliminire mittelst dieser x aus $\frac{dX}{dx}$. Die so entstandene Gleichung für $\frac{dX}{dx}$ wird zwei negative Wurzeln haben, wenn die Ordnung 𝔅 ist wie in vorliegender Figur, zwei positive im umgekehrten Fall, indess die übrigen Wurzeln ihre Zeichen nicht verändern, wenn die Zahlen a, b 1ster Abschnitt §. 2. dieselben bleiben.

Zudem ist es wahrscheinlich, dass sich für p, eine einfachere Bestimmung auch bei höheren Gleichungen werde finden lassen.

Anwendung der vorhergehenden Betrachtungen auf die Gleichungen vom 4ten und 5ten Grade.

Aufgabe 3.

Es ist eine Gleichung $X = 0$ vom 4ten Grade, nehmlich

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

gegeben, welche 2 unmögliche Wurzeln hat; man soll bestimmen von welchen Zeichen die beiden möglichen sind.

1) s ist negativ: dann sind die reellen Wurzeln von entgegengesetzten Zeichen.

2) s ist positiv: dann sind verschiedne Fälle zu unterscheiden.

I. Wenn alle drei Y negativ sind, $\frac{dX}{dx} = 0$ lauter mögliche Wurzeln hat, so können diese nur entweder alle positiv, oder alle negativ seyn (Fig. 24.), folglich sind die reellen Wurzeln von $X = 0$ positiv, wenn r negativ; und negativ, wenn r positiv ist.

II. In der Gleichung $\frac{dX}{dx} = 0$ befinden sich imaginäre Wurzeln: auch dann kommt es nur auf das Zeichen von r an, wie im vorhergehenden Fall, Fig. 25.

III. Zwei Y sind positiv, ein Y negativ, und alle Wurzeln von $\frac{dX}{dx} = 0$ möglich, Fig. 26.

Dann sind die reellen Wurzeln von $X = 0$ *positiv:*

a) wenn $\frac{dX}{dx} = 0$ lauter positive Wurzeln hat.

b) wenn $\frac{dX}{dx} = 0$ positive und negative Wurzeln hat, und das 3te Y negativ ist, welches auszumitteln man der Bequemlichkeit wegen das zweite Glied von $X = 0$ wegschaffe, wobei dann, wenn das letzte Glied durch diese Umformung negativ wird, das Zeichen von p entscheidet, und wenn das letzte Glied positiv bleibt, nach Aufgabe I. verfahren wird.

Die reellen Wurzeln von $X = 0$ *sind negativ:*

a) wenn $\frac{dX}{dx} = 0$ lauter negative Wurzeln hat.

b) wenn $\frac{dX}{dx} = 0$ positive und negative Wurzeln hat und das 1ste Y negativ ist.

Aufgabe 4. Es sey $X = 0$ eine Gleichung vom 5ten Grade

$$x^5 + px^4 + qx + rx^2 + sx + t = 0;$$

in der 2 Wurzeln unmöglich sind: man soll die Zeichen der reellen bestimmen.

Die Gleichung für die Y bezeichne ich mit $M = 0$. Zwei Wurzeln können auf dreierlei Art unmöglich werden, nehmlich

I. Wenn $\frac{dX}{dx} = 0$ zwei unmögliche Wurzeln hat und das Produkt aller Y negativ ist.

II. Wenn $\frac{dX}{dx} = 0$ lauter mögliche und $M = 0$ 3 positive Wurzeln, 1 negative hat.

III. Wenn $\frac{dX}{dx} = 0$ lauter mögliche und $M = 0$ 3 negative Wurzeln, 1 positive hat.

Je nachdem I, II, III Statt findet, giebt es auch für die Zeichen der reellen Wurzeln verschiedne Kennzeichen, daher ich jeden Fall besonders durchgehen werde.

I. Fig. 27. Von den reellen Wurzeln der Gleichung $X = 0$ sind:

a) *alle positiv*, wenn t negativ ist und die reellen Wurzeln von $\frac{dX}{dx} = 0$ beide positiv sind.

b) *alle negativ*, wenn t positiv ist und die reellen Wurzeln von $\frac{dX}{dx} = 0$ beide negativ sind.

c) *eine positiv*, *zwei negativ*, wenn t negativ ist und die reellen Wurzeln von $\frac{dX}{dx} = 0$ beide negativ oder von entgegengesetzten Zeichen sind.

d) *zwei positiv*, *eine negativ*, wenn t positiv ist und die reellen Wurzeln von $\frac{dX}{dx} = 0$ beide positiv, oder von entgegengesetzten Zeichen sind.

II. Fig. 28. Von den 3 reellen Wurzeln der Gleichung $X = 0$ sind:

a) *alle positiv*, wenn t negativ ist und $\frac{dX}{dx} = 0$ lauter positive Wurzeln hat.

b) *eine negativ*, *zwei positiv*, wenn t positiv und: die Wurzeln von $\frac{dX}{dx} = 0$ alle positiv sind, oder: 3 derselben positiv, 1 negativ oder: 2 derselben positiv, 2 negativ sind und das 4te Y negativ ist (welches aus Aufg. 1 Auflös. 1 oder 2 bestimmt wird), oder: 3 negativ sind, 1 positiv und das 4te Y negativ ist. (Aufg. 1. Anm. am Ende).

c) *zwei negativ*, *eine positiv*, wenn t negativ ist und nicht alle Wurzeln von $\frac{dX}{dx} = 0$ positiv sind.

d) *alle negativ*, wenn t positiv und entweder: alle Wurzeln von

$\frac{dX}{dx} = 0$ negativ sind oder: 2 negativ, 2 positiv und das 2te Y negativ ist, oder: 3 negativ, 1 positiv und das 2te Y negativ.

III. Hier wird dem vorigen Fall ähnlich verfahren. Die Tangenten lafsen sich hier, wie dort, mit gleicher Leichtigkeit anwenden, um zu erörtern ob das 1ste oder 3te Y positiv ist.

Die Elimination, welche hier oft nöthig ist, wird weitläuftig bei den höhern Gleichungen. Sie abzukürzen gehört wesentlich hierher. Ich will, da es mir noch nicht gelungen ist, wenigstens mein Bestreben darnach durch die folgende Untersuchung über die allgemeine Form der durch die Elimination entstehenden Coefficienten darthun. Das Resultat derselben ist, dafs diese allgemeine Form zu zusammengesetzt seyn würde, um beim Gebrauch derselben einige Erleichterung erwarten zu lafsen. Daher könnte das folgende auch wegbleiben, wenn ich keinen andern Grund hätte, es mit abdrucken zu lafsen. Ich fühlte nehmlich das Bedürfnifs diese Untersuchung anzustellen zu einer Zeit, da ich entblöfst von beinahe allen litterärischen Hülfsmitteln war; ich mufste also selbst suchen. Nun war mir vor allen Dingen eine lebendige Anschauung der allgemeinen Form der Summen der Potenzen der Wurzeln einer Gleichung und völlig entwickelter vielgliedriger Funktionen nöthig. Ich suchte daher diese Form selbst und fand sie auf einem vielleicht neuen Wege. Sollten meine Gedanken hierüber wirklich neu seyn, so wäre dies, bei einem doch wichtigen Gegenstande, Grund genug sie bekannt zu machen. Mein Eigenthum sind sie gewifs.

Anhang.

Ueber die allgemeine Form völlig entwickelter vielgliedriger Funktionen.

Wenn $X = y$ und $\xi = o$ nach Potenzen von x geordnete algebraische Gleichungen sind, so erhält man durch die Elimination von x für y eine Gleichung, in der die Form der Coefficienten zusammengesetzt ist

1) aus der Form der Summen der Potenzen der Wurzeln von $\xi = o$

2) aus der Form eines auf irgend eine positive ganze Potenz erhobenen Polznoms, oder einer völlig entwickelten Funktion überhaupt.

Beide müſsen also erst untersucht werden, wenn man jene Form der Coefficienten ausmitteln will.

Vorläufige Erklärungen.

Wenn eine Gleichung von einem beliebigen Grade m gegeben ist $x^m - px^{m-1} + qx^{m-2} - rx^{m-3} + sx^{m-4} \ldots\ldots \pm k_m = o$; so ist p, als Funktion der Wurzeln betrachtet, von einer Dimension, q von 2 Dimensionen, r von 3, s von 4 u. s. w. Multiplicirt man 2 oder mehr Coefficienten mit einander, so wird das Produckt, ebenfalls als Funktion der Wurzeln betrachtet, von soviel Dimensionen seyn, als die Summe der Dimensionen jedes einzelnen Coefficienten beträgt. Ich werde diese Produckte nach der Zahl der Coefficienten, aus denen sie bestehen und nach der Zahl ihrer Dimensionen, d. h. nach der Menge der Wurzeln, welche als Faktoren in den diese Produckte bildenden Coefficienten enthalten sind, claſsificiren, und ein solches Produckt mit $\kappa^{(\beta)b}$ bezeichnen, wo β die Anzahl der mit-

einander multiplicirten Coefficienten bedeutet und b anzeigt, von welcher Anzahl von Dimensionen dieses Produckt ist. Man kann sich nun vorstellen, daſs $k^{(\beta)b}$ aus lauter verschiednen Coefficienten bestehe, oder daſs einer oder mehrere wiederhohlentlich darin vorkommen, d. h. es können sich in diesem Produckt auf irgend eine Potenz steigende Coefficienten befinden. Die Exponenten dieser Potenzen bezeichne man mit λ, λ', λ'' ...; diejenigen Coefficienten, die nur einmal als Faktoren in diesem Produckte vorkommen, haben den Exponenten 1; man bringe auch diesen unter jene allgemeine Bezeichnung mit λ, λ', λ'' ..., alsdann wird

$$\beta = \lambda + \lambda' + \lambda'' + \lambda''' + \ldots$$

seyn; bezeichnet man nun den ersten Coefficienten p mit k_1, den 2ten q mit k_2, den 3ten r mit k_3 u. s. f. so wird jede an k gehängte Zifer die Anzahl der Dimensionen des ihm entsprechenden Coefficienten anzeigen, welche ich allgemein mit l, l′, l″ . . . bezeichne und es wird seyn

$$b = \lambda l + \lambda' l' + \lambda'' l'' + \lambda''' l''' + \ldots;$$

Demnach wird $k^{(\beta)b}$ das Produckt einer beliebigen Anzahl verschiedner Coefficienten, jeden auf eine beliebige Potenz erhoben, doch so, daſs die Summe der Exponenten $= \beta$, die Anzahl der Dimensionen in Rücksicht auf die Wurzeln $=$ b sey, bedeuten, und $\Sigma\, k^{(\beta)b}$ alle mögliche solche Produckte, soviel sich deren verschiedne für daſselbe β und daſselbe b aus den Coefficienten bilden laſsen. Man kann sich β und b auch veränderlich denken und dann erstreckt sich das Σ Zeichen auf alle Werthe, die es für β und b in einem vorliegenden Falle giebt. $\dfrac{k^{(\beta)b}}{1.2\ldots\lambda.1\ldots\lambda'\ldots}$ wird ein solches Produckt durch $1.2\ldots\lambda.1\ldots\lambda'.1\ldots\lambda''\ldots$ dividirt vorstellen und $\Sigma\, \dfrac{k^{(\beta)b}}{1\ldots\lambda.1\ldots\lambda'\ldots}$ alle mög-

liche solche Produckte, jedes durch das ihm entsprechende $1 \ldots \lambda . 1 \ldots \lambda' \ldots$ dividirt.

Das Σ Zeichen erstreckt sich hier auf alle Coefficienten, den ersten ausgenommen. Z. B. $\Sigma \frac{k^{(3)} 8}{1 \ldots \lambda . 1 \ldots \lambda' \ldots} = \frac{k^2_2 k_4}{1.2.1} + \frac{k_2 k^2_3}{1.1.2} = \frac{q^2 s}{1.2.1} + \frac{q r^2}{1.1.2}$; $\Sigma k^{(4)} 8 = \frac{k^4_2}{1.2.3\,4}$.—$f^{(\beta)}$ würde nun überhaupt ein Produckt eines Theils gegebner Faktoren vorstellen; sollen die Faktoren nach einem gegebnen Gesetz unter sich verbunden werden, so werde ich dieses Gesetz durch $'$, $''$, $'''$ . . . über der Klammer rechts anzeigen; demnach werde ich $f(f-1)(f-2)(f-3) \ldots (f-(\beta-1)) = f^{(\beta)'}$; $f(f-g)(f-(g+1))(f-(g+2)) \ldots = f^{(\beta)''}$; $\lambda(\lambda-1) \ldots 2.1.\lambda' \ldots 1$, $\lambda'' \ldots 1.\lambda''' \ldots 1 \ldots = (\lambda^{(\lambda')})^{(\varphi \beta)}$ setzen, wo ich $\varphi\beta$ wähle, um anzuzeigen, daſs dieser Nenner zu einem Produckt von β Faktoren gehört.

Ich werde mit a eine unbestimmte Wurzel der Gleichung überhaupt bezeichnen. Also bedeutet Σa^n die Summe der nten Potenzen der Wurzeln.

Vorläufige Betrachtung.

Ich will die allgemeine Form derselben suchen. Ich weiſs, daſs $\Sigma a^n = p \Sigma a^{n-1} - q \Sigma a^{n-2} + r \Sigma a^{n-3} - s \Sigma a^{n-4} \ldots \pm n k_n$.

Daraus sehe ich sogleich, daſs Σa^n, in den Coefficienten p, q, r... allein ausgedrückt, folgendermaſsen gestaltet seyn wird:

$$p^n - H q p^{n-2} + J r p^{n-3} - [K s + L q^2] p^{n-2} + \ldots$$

wo H, J, K, L . . die Zahlen bedeuten, mit welchen die Coefficienten q, r, s . . . und deren Combinationen multiplicirt sind. Um diese auszumitteln beobachte ich den Gang ihrer Bildung, von der ersten Potenz zu höhern Potenzen der Wurzeln fortschreitend, wie folgt:

$$\Sigma a = p$$
$$\Sigma a^2 = p^2 - 2q$$
$$\Sigma a^3 = p^3 - (2+1)qp + 3r$$
$$\Sigma a^4 = p^4 - (2+1+1)qp^2 + (3+1)rp - 4s + 2q^2$$
$$\Sigma a^5 = p^5 - (2+1+1+1)qp^3 + (3+1+1)rp^2 - [(4+1)s - (2+3)q^2]\,p + 5t - (3+2)qr$$
$$\Sigma a^6 = p^6 - 6qp^4 + 6rp^3 - [6s - (2+3+4)q^2]\,p^2 + [6t - (3+2, + 4+3)qr]\,p - 6u - 2q^3 + (4+2)qs + 3r^2$$
$$\Sigma a^7 = p^7 - 7qp^5 + 7rp^4 - [7s - (2+3+4+5)q^2]\,p^3 + [7t - (3+2, + 4+3, + 5+4)qr]\,p^2 + [-7u - (2, + 2+3)q^3 + (4+2, + 5+3)qs + (3+4)r^2]\,p \text{ u. s. w.}$$
$$\Sigma a^8 = p^8 - 8qp^6 + 8rp^5 - [8s - (2+3+4+5+6)q^2]\,p^4 + [8t - (3+2, + 4+3, + 5+4, + 6+5)qr]\,p^3 + [-8u - (2, + 2+3, + 2+3+4)q^3 + (4+2, + 5+3, + 6+4)qs + (3+4+5)r^2]\,p^2 \text{ u. s. w.}$$

So in Gedanken fortfahrend kann man sich überzeugen, dafs, wenn man nur auf die ersten 5 Coefficienten von p Rücksicht nimmt, die Summen aller Potenzen der Wurzeln, deren Exponenten ganze Zahlen sind, folgende allgemeine Form haben werden:

$$\begin{array}{llllll}
\Sigma a^n = p^n - nqp^{n-2} & + nrp^{n-3} & - nsp^{n-4} & + ntp^{n-5} & - nup^{n-6} + \dots \\
 & & + n(n-3)\frac{q^2}{1.2} & - n(n-4)qr & + n(n-5)qs \\
 & & & & + n(n-5)\frac{r^2}{1.2} \\
 & & & & - n(n-4)(n-5)\frac{q^3}{1.2.3}
\end{array}$$

Daraus vermuthe ich, es werde Σa^n allgemein für die Coefficienten aller Potenzen von p die Form haben, welche der Gegenstand des folgenden Lehrsatzes ist.

Lehrsatz 1.

$$\Sigma a^n = p^n - nk_2 p^{n-2} + nk_3 p^{n-3} - \begin{matrix} nk_4 \\ +n(n-3)\frac{k_2^2}{1.2} \end{matrix} p^{n-4}$$

$$+ \begin{matrix} nk_5 \\ --n(n--4)k_2k_3 \end{matrix} \cdot p^{n-5} - \left. \begin{matrix} nk_6 \\ +n(n--5)\begin{cases} k_2k_4 \\ \frac{k_3^2}{1.2} \end{cases} \\ -n(n-4)(n-5)\cdot\frac{k_2^3}{1.2.3} \end{matrix} \right\} p^{n-6} + \left. \begin{matrix} nk_7 \\ -n(n-6)\begin{cases} k_2k_5 \\ k_3k_4 \end{cases} \\ +n(n-5)(n-6)\frac{k_2^2 k_3}{1.2} \end{matrix} \right\} p^{n-7}$$

$$- \begin{matrix} nk_8 \\ +n(n-7)\begin{cases} k_2k_6 \\ k_3k_5 \\ \frac{k_4^2}{1.2} \end{cases} \\ --n(n--6)(n--7)\begin{cases} \frac{k_2^2 k_4}{1.2} \\ k_2\frac{k_3^2}{1.2} \end{cases} \\ +n(n-5)(n-6)(n-7)\frac{k_2^4}{1.2.3.4} \end{matrix} \cdot p^{n-8} + \begin{matrix} nk_9 \\ -n(n-8)\begin{cases} k_2k_7 \\ k_3k_6 \\ k_4k_5 \end{cases} \\ +n(n--7)(n-8)\begin{cases} \frac{k_2^2 k_5}{1.2} \\ k_2k_3k_4 \\ \frac{k_3^3}{1.2.3} \end{cases} \\ -n(n-6)(n-7)(n-8)\frac{k_2^3 k_3}{1.2.3} \end{matrix} \cdot p^{n-9} - \ldots + \ldots$$

$$\begin{matrix} \pm nk_b \\ \mp n(n--(b-1))\Sigma \underset{1..\lambda}{k^{(2)}b} \\ \pm n(n--(b--2))(n--(b--1))\Sigma \underset{(\lambda^{(\lambda)'})\overline{(\varphi 3)}}{k^{(3)}b} \\ \mp n(n-(b--3))(n--(b--2))(n--(b--1))\Sigma \underset{(\lambda^{(\lambda)'})\overline{(\varphi 4)}}{k^{(4)}b} \\ \pm n(n-(b-4))(n-(b-3)(n-(b-2))(n-(b-1))\Sigma \underset{(\lambda^{(\lambda)'})\overline{(\varphi 5)}}{k^{(5)}b} \end{matrix} \cdot p^{n-b} \mp \ldots \text{ bis } b = n$$

u. s. f. bis $\beta = \frac{b}{2}$ oder $= \frac{b-1}{2}$

Zu bemerken ist, daſs die Anzahl der Faktoren n, $(n-(b-1))$, $(n--(b-2))$, ... = der Zahl β der Faktoren des Produckts $k^{(\beta)b}$.

Beweis.

1. $$n(n-m)(n-(m+1))\ n-(m+2))\ \ldots\ (n-(m+\mu) =$$
$$((m-1)1 + n-(m-1))\ (n-m)(n-(m+1))\ \ldots\ (n-(m+\mu)$$

folglich

$$\Sigma n(n-m)\ldots(n-(m+\mu)) = \left[\frac{m-}{\mu+2} + \frac{n-(m-2)}{\mu+3}\right](n-(m-1))(n-m)\ldots(n-(m+\mu));$$

woraus folgt

$$\Sigma n(n-m)\ldots(n-(m+\mu)) = \frac{(\mu+2)n+m+\mu+1}{(\mu+2)(\mu+3)}(n-(m-1))(n-m)\ldots(n-(m+\mu)); \text{(I)}$$

2. Es ist klar, daſs die Form des Coefficienten von p^{n-b} in dem Ausdruck für Σa^n sich folgendermaſsen darstellen läſst:

$$\pm\, n k_b \pm \Sigma n(n-(b-(\beta-1)))\ldots(n-(b-1))\frac{k^{(\beta)}b}{\lambda^{(\lambda)\prime})^{(\phi\beta)}}$$

wo die Summe jedesmal von $\beta = 2$ bis $\beta = \frac{1}{2}b$ oder $\frac{1}{2}(b-1)$, je nachdem b gerade oder ungerade ist, genommen wird, die Zeichen aber in der Ordnung des Lehrsatzes 1. auf einander folgen.

Setze ich nun voraus, daſs die hier angegebne Form der Coefficienten von p bis vor einen unbestimmten Exponenten $n-b$ von p richtig sey, so kommt es darauf an, ob auch der folgende Coefficient von dieser Form seyn müſse, wenn alle vorhergehende diese Form haben.

3. Ich bezeichne ein jedes Produckt $n(n-(b-1))k_2 k_{b-2}$, $n(n-(b-\ ))k_3 k_b$, $n(n-(b-2))(n-(b-1))k_2 k_3 k_{b-5}$ u. s. w. vor p^{n-b} in dem Ausdruck für Σa^n mit P und betrachte es als die Summe einer Reihe, oder als eine Funktion von n, deren Differenz ΔP sey, wenn n um 1 wächst oder abnimmt und zwar bezeichne ich hier mit ΔP das letztere, so daſs ΔP die Differenz von P bedeutet, wenn n aus $n-1$ geworden ist. Nennt man nun solche Produckte P für Σa^{n-2}, Σa^{n-3} ... $P_{\prime}$, $P_{\prime\prime}$ ..., so ist aus dem vorhergehenden

(vorl. Betr.) klar, daſs ΔP entsteht, indem man $P_{,}$, $P_{,,}$ . . . mit k_2, k_3 . . . multiplicirt und diejenigen von den so entstandenen Produkten P nimmt, in welchen die Faktoren k dieselben bleiben. Wenn man nun den Coefficienten von p^{n-2} in Σa^n den ersten, von p^{n-3} den zweiten u. s. w., und eben so den Coefficienten von p^{n-l-2} in Σa^{n-l} den ersten u. s. w. nennt, so ist ferner klar, daſs ΔP nur aus denjenigen $P_{,}$, $P_{,,}$ . . ., welche zu den Coefficienten gehören, die in den Σa^{n-l} die frühern der Ordnung nach sind, als es der Coefficient von p^{n-b} in Σa^n ist, gebildet seyn wird. Daraus folgt, daſs, wenn ich bewiesen habe, die vermuthete Form von Σa^n gelte für den Coefficienten von p^{n-b}, wenn sie für alle vorhergehende Coefficienten gilt, sie auch für alle folgende Coefficienten gelten müſse. Nehmlich b stellt eine unbestimmte Zahl vor. Daſs diese Form aber für den Coefficienten von p^{n-b} gilt, wenn sie für die vorhergehenden Coefficienten die richtige ist, beweise ich folgendermaſsen:

$$\Delta P = \Sigma k_1 (n-l)(n-l-(b-l-(\beta-2)))(n-l-(b-l-(\beta-2))-1) \ldots \ldots (n-l-(b-l-1)) \frac{k^{(\beta-1)}\, b-l}{1 \ldots (\lambda-1).1.\lambda'.1 \ldots}$$

Die Summe in Rücksicht auf l genommen. Dieses giebt

$$\Delta P = (n-(b-(\beta-2))) \ldots (n-(b-1)) \frac{k^{(\beta)}\, b}{(\lambda(\lambda'))(\varphi\beta)} [\lambda(n-l) + \lambda'(n-l') + \lambda''(n-l'') + \ldots].$$

Dieser Ausdruck verglichen mit (1) giebt

$$m = b - l - \beta + 2;$$
$$\mu + 2 = \beta - 1;\ \mu + 3 = \beta;$$
$$m + \mu + 1 = b - l$$

folglich giebt er summirt in Beziehung auf n

$$\left[\frac{\lambda[(\beta-1)(n-l)+b-l]+\lambda'[(\beta-1)(n-l')+b-l']+\lambda''[(\beta-1)(n-l'')+b-l'']+\ldots}{(\beta-1)\,\beta}\right]$$

$$\times\,(n-(b-(\beta-1)))\;\ldots\;(n-(b-1))\,\frac{k^{(\beta)}b}{(\lambda(\lambda)')(\varphi\beta)}$$

$$=\left[\frac{\lambda[(\beta-1)n-l\beta+b]+\lambda'[(\beta-1)n-l'\beta+b]+\lambda''[(\beta-1)n-l''\beta+b]+\ldots}{(\beta-1)\,\beta}\right]$$

$$\times\,(n-(b-(\beta-1)))\;\ldots\;(n-(b-1))\,\frac{k^{(\beta)}b}{(\lambda(\lambda)')(\varphi\beta)}$$

Der erste Faktor, zur Linken, ist =

$$\frac{(\lambda+\lambda'+\lambda''+\lambda'''+\lambda^{IV}+\ldots)(\beta-1)n+(\lambda+\lambda'+\lambda''+\ldots)b-(\lambda l+\lambda' l'+\lambda'' l''+\lambda''' l'''+\ldots)\beta}{(\beta-1)\,\beta}$$

Wir haben gesehen, daſs

$$\lambda+\lambda'+\lambda''+\lambda'''+\ldots=\beta$$

und

$$\lambda l+\lambda' l'+\lambda'' l''+\lambda''' l'''+\ldots=b$$

ist: man erhält folglich

$$\frac{\beta(\beta-1)\,n+\beta b-b\beta}{\beta(\beta-1)}=n$$

Folglich $\Sigma\Delta P$ oder

$$P=n(n-(b-(\beta-1)))\;\ldots\;(n-(b-1))\,\frac{k^{(\beta)}b}{(\lambda(\lambda)')(\varphi\beta)}$$

4. Wenn man dieses in Beziehung auf β nach (2.) summirt, so ist $\Sigma P \pm n k_b$ = dem Coefficienten von p^{n-b}, der also die vorausgesetzte Form (2.) hat, und folglich haben sie auch alle folgenden; was aber die Zeichen $\pm$ betrifft, so bekommt jedes k_m — vor sich, wenn m gerade, +, wenn es ungerade ist, woraus sich denn die Zeichen der Produckte $k^{(\beta)}$ leicht finden laſsen. Man sieht leicht ein, daſs, wenn die Produckte $k^{(\beta)}b$ alle positiv genommen werden, die Zeichen vor den Σ Zeichen nach der Ordnung, wie im Lehrsatz angegeben ist, abwechseln; denn bis auf $k^{(3)}b$ ist es richtig und dar-

aus folgt, wenn man auf die Entstehung von $k^{(3)}b$ sieht, dafs eben diese Abwechselung bis $k^{(3)}b$ Statt findet u. s. f. Man sieht gleichfalls, dafs von jedem Produckt $k^{(\beta)}b$ alle mögliche Combinationen vorkommen müfsen, folglich ist die hier aufgestellte Form von Σa^n die richtige, wenn einige der ersten Coefficienten von p diese Form haben; dafs dieses aber der Fall ist, habe ich oben (vorl. Betr.) gezeigt.

Ich werde nun zeigen, wie man aus der Form von Σa^n die Form einer entwickelten Funktion findet.

Aufgabe

Es ist ein Polynom $X = A - px + k_2 x^2 - k_3 x^3 + k_4 x^4 - \ldots -$ gegeben; man soll defsen Logarithmen in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln und den Coefficienten von x^n, den ich c_n nenne, bestimmen.

Auflösung

$lX = lA + l(1 - \frac{px}{A} + \frac{k_2 x^2}{A} - \ldots)$; es seyn $1 + ax$, $1 + a'x$, $1 + a''x$, $1 + a'''x$, u. s. w. die Faktoren von $\frac{X}{A}$, also

$$l\frac{X}{A} = l(1 + ax) + l(1 + a'x) + l(1 + a''x) + l(1 + a'''x) + \ldots$$

welches entwickelt giebt

$$l\frac{X}{A} = \Sigma ax - \frac{\Sigma a^2}{2} . x^2 + \frac{\Sigma a^3}{3} . x^3 \ldots \pm \frac{\Sigma a^n}{n} . x^n \mp \ldots\ldots$$

welche Summen, und folglich auch die Coefficienten von lX gefunden werden, wenn man (Lehrs. 1.) $\frac{p}{A}$, $\frac{k_2}{A}$ $\frac{k_3}{A}$ . . $\frac{k_b}{A}$ statt p, k_2, k_3, . . . k_b substituirt; wodurch man erhält:

$$c_n = \frac{1}{nA^n} p^n - \frac{k_2}{A^{n-1}} p^{n-2} + \frac{k_3}{A^{n-2}} p^{n-3} - \ldots \pm \left. \begin{matrix} \frac{k_b}{A^{n+1-b}} \\ \mp \frac{n-b+1}{A^{n-b+2}} \cdot \frac{\Sigma k^{(2)b}}{(\lambda\lambda')(\varphi 2)} \\ \mp \frac{(n-b+2)(n-b+1)}{A^{n-b+3}} \frac{\Sigma k^{(3)b}}{(\lambda\lambda')(\varphi 3)} \\ \mp \ldots\ldots\ldots \\ \& \ldots \& \end{matrix} \right\} p^{n-b} \mp \ldots$$

Lehrsatz. 2.

Wenn k_n den nten Coefficienten einer in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe, $\varphi A - K x + K_2 x^2 - \ldots$, entwickelten Funktion φX bedeutet, wo $X = A - px + k_2 x^2 - \ldots$, so ist, wenn n ungerade,

$$K_n = \frac{d^n \varphi A}{dA^n} \cdot \frac{p^n}{1.2..n} + \frac{d^{n-1}\varphi A . k_2}{dA^{n-1}} \frac{p^{n-2}}{1.2..(n-2)} + \frac{d^{n-2}\varphi A . k_3}{dA^{n-2}} \cdot \frac{p^{n-3}}{1.2..(n-3)}$$

$$+ \left. \begin{matrix} \frac{d^{n-3}\varphi A . k_4}{dA^{n-3}} \\ + \frac{d^{n-2}\varphi A . k_2^2}{dA^{n-2} \; 1.2} \end{matrix} \right\} \frac{p^{n-4}}{1.2..(n-4)} + \left. \begin{matrix} \frac{d^{n-4}\varphi A . k_5}{dA^{n-4}} \\ + \frac{d^{n-3}\varphi A . k_2 k_3}{dA^{n-3}} \end{matrix} \right. \frac{p^{n-5}}{1.2..(n-5)}$$

$$+ \left\{ \begin{matrix} \frac{d^{n-b+1}\varphi A}{dA^{n-b+1}} \cdot k_b \cdot \frac{p^{n-b}}{1.2..(n-b)} + \ldots \;\&\; \text{bis } b = n. \\ + \frac{d^{n-b+2}\varphi A}{dA^{n-b+2}} \frac{\Sigma k^{(2)b}}{(\lambda\lambda')(\varphi 2)} \\ + \frac{d^{n-b+3}\varphi A}{dA^{n-b+3}} \frac{\Sigma k^{(3)b}}{(\lambda\lambda')(\varphi 3)} \\ + \frac{d^{n-b+4}\varphi A}{dA^{n-b+4}} \frac{\Sigma k^{(4)b}}{(\lambda\lambda')(\varphi 4)} \\ \ldots\ldots \\ \text{u. s. f. bis } n - \frac{b}{2} \text{ oder} \\ n - \frac{(b-1)}{2} \end{matrix} \right.$$

Ist n gerade, so werden alle Zeichen negativ.

Beweis

Bekannt ist, daſs $k_n = \frac{d^n \varphi X}{1.2.3..n dx^n}$, darin nach der Differentiation $x = 0$ gesetzt; es ist leicht zu übersehen, daſs dieser Differenzialquotient, völlig entwickelt, ein Aggregat von p, k_2, k_3 . . . und den Differenzialen von φA (d. h. $X = A$ gesetzt und dieses als veränderlich betrachtet) seyn müſse, und zwar von der Art, daſs keine Produckte oder über die erste steigende Potenzen dieser Differenziale vorkommen: ferner, wenn $\varphi A = lA$ gesetzt wird, muſs dieses Aggregat oder $K_n = c^n$ werden; demnach muſs daſselbe diese Form haben:

$$\frac{d^{n'} \varphi A}{dA^{n'}} . f p^n + \frac{d^{n''} \varphi A}{dA^{n''}} . f' k_2 p^{n-2} + \ldots + \frac{d^{n\sigma} \varphi A}{dA^{n\sigma}} f^\sigma k_b\, p^{n-b} + \ldots$$
$$+ \frac{d^{n\tau} \varphi A}{dA^{n\tau}} \Sigma . (f^\tau k^{(2)} b)$$
$$+ \frac{d^{n\upsilon} \varphi A}{dA^{n\upsilon}} \Sigma . (f^\upsilon k^{(3} b)$$
$$+ \ldots . \& \ldots$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

denn nur unter dieser Form ist es möglich, daſs $\varphi A = lA$ gesetzt gebe $K_n = c_n$, wenn φA nur, wie dieses der Fall ist, in seinen Differenzialen vorkommt, und diese nie unter sich multiplicirt vorkommen. Aus Vergleichung dieses Ausdrucks nun, nachdem darin $\varphi A = lA$ gesetzt worden, mit c_n wird n', n'' ... f, f', f'' ... bestimmt, indem man f, f' ... in 2 Faktoren theilt, einen vor, den andern hinter die Σ Zeichen setzt und so ergiebt sich der Lehrs. 2. sehr leicht.

Zusatz.

Auch ist, wenn auch p unter die allgemeine Bezeichnung mit k gebracht wird

$$K_n = \Sigma \frac{d^\beta \varphi A}{dA^\beta} \frac{k^{(\beta)}{}_n}{(\lambda\lambda)')(\varphi\beta)} \; ; \text{(I)}$$

wo die Summe von $\beta = 1$ bis $\beta = n$ erstreckt werden muſs.

$$\varphi X = \varphi A + \Sigma \frac{d^\beta \varphi A}{dA^\beta} \frac{k^{(\beta)}{}_n}{(\lambda(\lambda)')(\varphi\beta)} x^n \; ; \text{(II)}$$

wo n von 1 bis ins unendliche oder bis ein Differenzialquotient von $\varphi A = 0$ wird, verändert werden muſs. Für β werden für jedes n alle Werthe genommen, die es giebt.

Daraus folgt auch

$$\varphi X = \Sigma \frac{d^\beta \varphi A}{dA^\beta} \cdot \frac{k^{(\beta)}{}_n}{(\lambda(\lambda)')(\varphi\beta)} x^n \; ; \quad \text{(III)}$$

wenn die Summen von $n = 0$ an genommen wird. Es versteht sich daſs für $n = 0$ auch $\beta = 0$ wird, und daſs sobald $n > 0$, β nicht < 1 werden kann.

$$\Sigma a^n = \Sigma\, n^{(\beta)''} \frac{k^{(\beta)}{}_b}{(\lambda\lambda)')(\varphi\beta)} p^{n-b} \; ; \quad \text{(IV)}$$

wo $n^{(\beta)''}$ im Sinne der vorl. Erkl. genommen ist, und in Rücksicht auf b und β summirt wird.

Aufgabe 2.

Es sind 2 Gleichungen gegeben

$$x^m + K_1 x^{m-1} + K_2 x^{m-2} + K_3 x^{m-3} \ldots + K_m = Y,$$

und: $X = 0$ vom Grade n, darin die Coefficienten mit $p_1\ k_2,\ k_3 \ldots$ bezeichnet sind. Man soll ΣY^ν finden.

Auflösung. $Y^\nu = \Sigma \frac{d^\beta (1)^\nu}{(d(1))^\nu} \cdot \frac{K^{(\beta)}{}_b}{(\lambda(\lambda)')(\varphi\beta)} x^{m\nu - b}$, wo ν und m

beständig sind, b von o bis m ν geändert wird; daher

$$\Sigma Y^{\nu} = \Sigma \nu^{(\beta)'} . \frac{K^{(\beta)}b}{(\lambda\lambda')(\varphi\beta)} . \Sigma x^{\nu m - b} = \Sigma \nu^{(\beta)'} \frac{K^{(\beta)}b}{(\lambda\lambda)'(\varphi\beta)} . \Sigma (m\nu -- b)^{(\beta')''} \times \frac{k^{(\beta')}b'}{(\lambda\lambda')(\varphi\beta')} . p^{\nu m - b - b'}$$

wo b′ von o bis νm - b geändert wird; dieses giebt, wofern alle K und k verschieden sind, oder so betrachtet werden, wie dieses immer erlaubt ist:

$$\Sigma Y^{\nu} = \Sigma \nu^{(\beta)'} (\nu m - b)^{(\beta')''} \frac{K^{(\beta)}b . k^{(\beta')}b'}{(\lambda\lambda')(\varphi\beta,\beta')} . p^{\nu m - b - b'}$$

Schluſsfolge.

$$(\Sigma Y^{\nu})^{\nu'} = \Sigma \nu'^{(\beta'')'} (\nu(\beta)')^{(\beta'')} ((\nu m - b)^{(\beta')''})^{(\beta'')} (K^{(\beta)}b)^{(\beta'')\Sigma b} (k^{(\beta')}b')^{(\beta'')\Sigma b'} \times \frac{p^{\nu'\nu m -- \Sigma b -- \Sigma b'}}{(\lambda(\lambda)')(\varphi\beta,\beta',\beta'')}$$

Es sey

$$Y^n + C_1 Y^{n-1} + C_2 Y^{n-2} \ldots + C_\mu Y^{n-\mu} + \ldots + C_n = 0$$

die aus der Elimination entstandne Gleichung $\varphi Y = 0$, so hat man

$$\frac{\varphi Y}{Y^n} = \frac{e^{l\varphi Y}}{Y^n} = \frac{e Y^n}{Y^n}\left(\frac{\Sigma Y}{Y} - \frac{\frac{1}{2}\Sigma Y^2}{Y^2} + \frac{\frac{1}{3}\Sigma Y^3}{Y^3} \ldots\right)$$

woraus folgt $C_\mu = \frac{\Sigma(\frac{1}{\nu}\Sigma Y^{\nu})(\beta''')}{(\lambda(\lambda)')(\varphi\beta''')}$

Diese Form ist sehr zusammengesetzt und schwerlich ist von ihr einige Erleichterung in der Rechnung zu erwarten, wenn sie auch völlig entwickelt wird. Sie setzt die völlig entwickelte Form von $(\Sigma Y^{\nu})^{\nu'}$ voraus, deren Hauptbestandtheile, wie einiges Nachdenken zeigt, Zahlen sind, welche anzeigen wievielmal gegebne ganze Zahlen zu zweien, dreien, vieren u. s. w. auf verschiedne Art so verbunden werden können, daſs die Summen derselben immer gleich ist.

Der allgemeine Ausdruck solcher Zahlen ist aber keinesweges bequem für die Rechnung, indem er auf der allgemeinen Entwickelung des Bruchs $\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots(1-x^n)}$ beruht, wo x nach der Entwickelung $= 1$ gesetzt und dann die entstandne Reihe bis zu einem gewißen Gliede summirt wird. Diese Summationen sind aber nur einfach wenn $n < 5$ ist. Es sey N die Summen von n ganzen Zahlen (und zwar positiven), Λ die Zahl welche anzeigt, wievielmal alle kleinere ganze Zahlen als $N + 2 - n$ zu n Gliedern auf verschiedne Art so verbunden werden können, daſs deren Summe $= N$ sey. Ist nun $n < 5$ so läſst sich Λ durch folgende Reihen bequem berechnen:

für $n = 2$ und

N = 2, 3, 4, 5, 6, 7

wird

Λ = 1 1 2 2 3 3

Differenzenreihe von

Λ = 1 0; 1 0; 1 0;

für $n = 3$ und

N = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16

wird die Differenzenreihe von

Λ = 1 0, 1 1 1 1; 2 1, 2 2 2 2; 3 2, 3 ....

für $n = 4$ und

N = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27

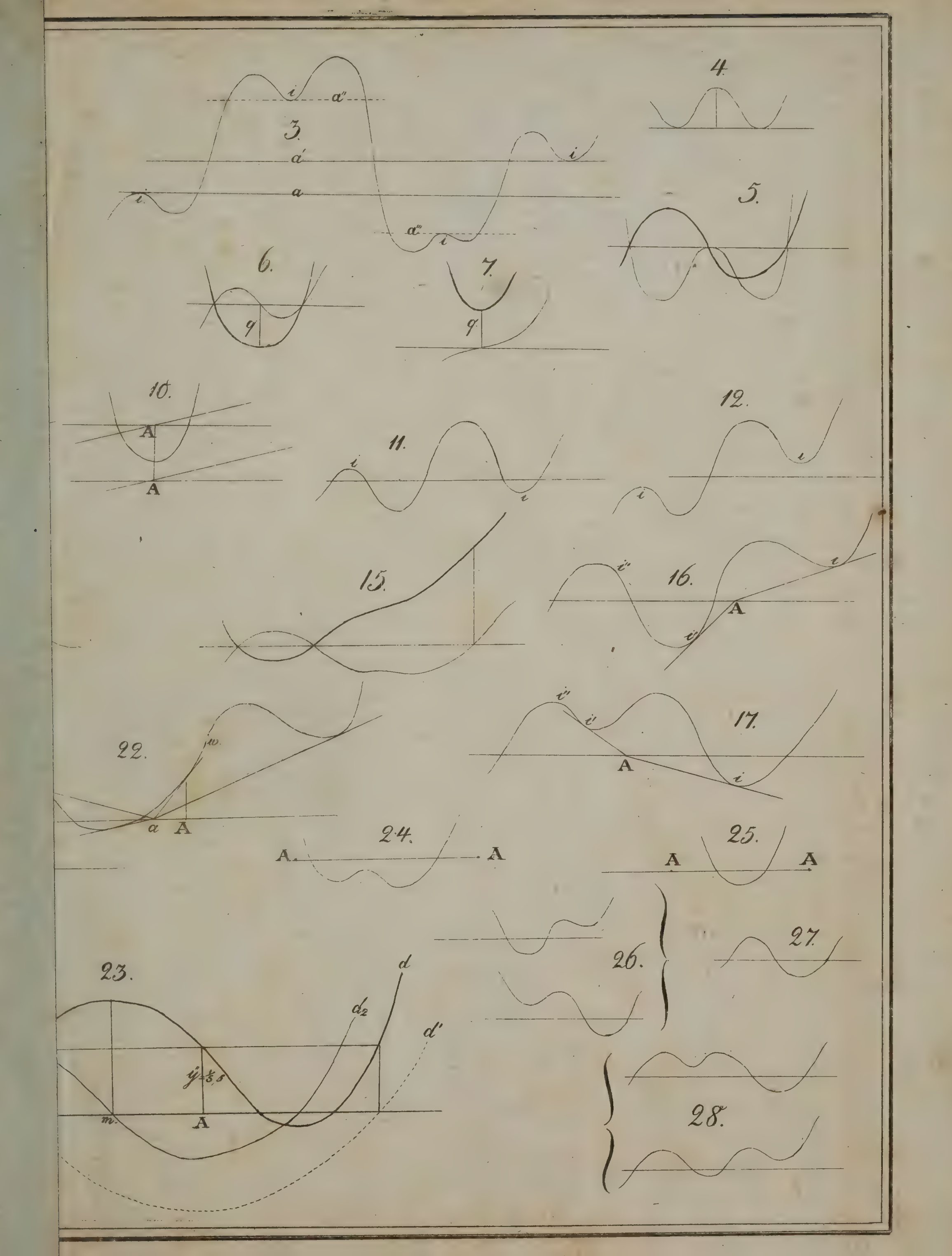
wird die Differenzenreihe von

Λ = 1 0 1 1, 2 1 3 2 4 3 5 4; 7 5 8 7, 10 8 12 10 14 12 16 14;...

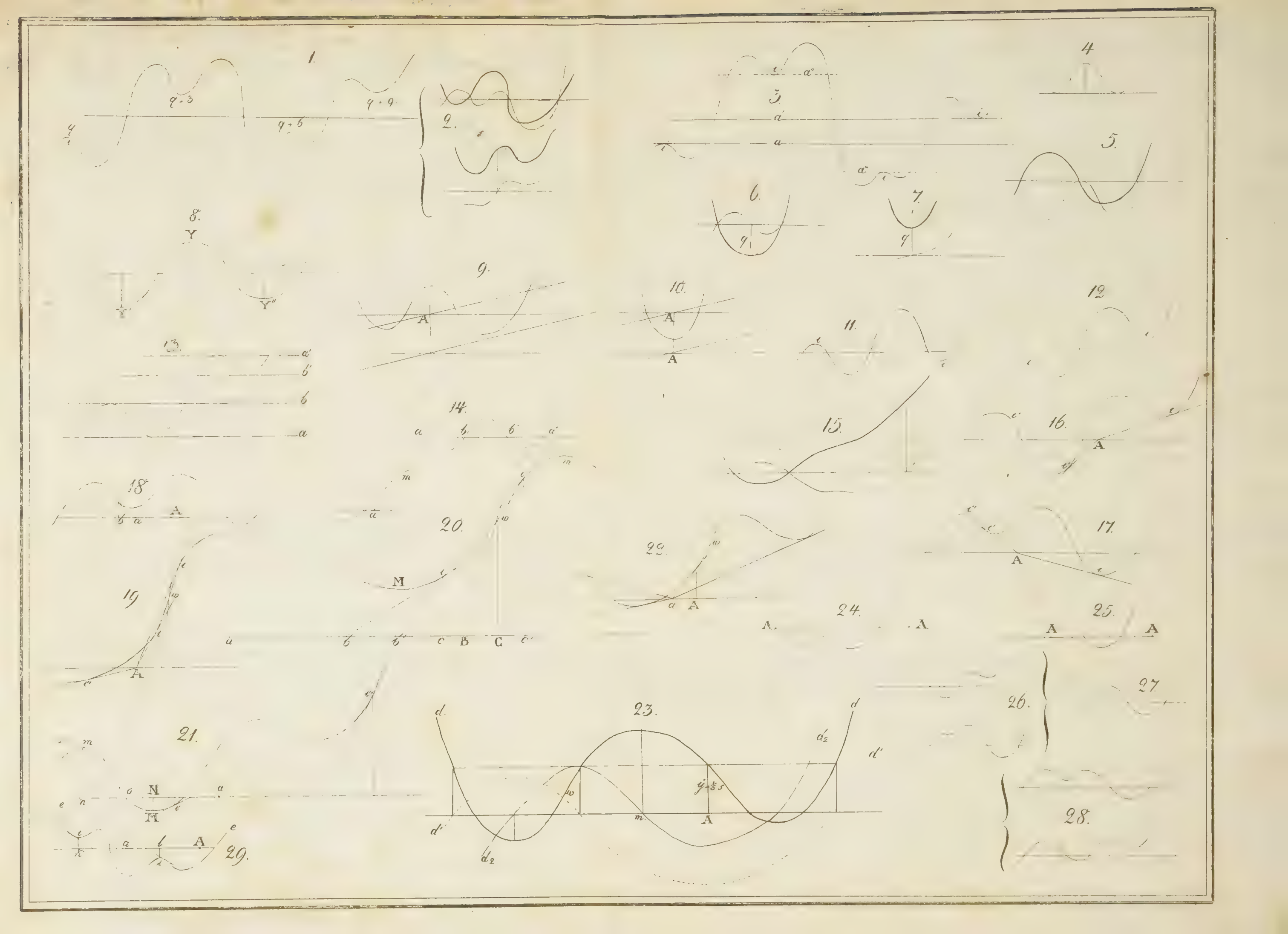
1 0, 1 1 1 1; 2 1, 2 2 2 2;...

Wird $n > 4$, so werden sowohl diese Reihen, als auch die allgemeinen Ausdrücke von Λ zu zusammengesetzt, um Erleichterung für die Rechnung, worauf es hier eigentlich abgesehen ist, zu versprechen.





3.
4.
5.
6.
7.
10.
11.
12.
15.
16.
17.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.



1.
2.
3.
4
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
29.

1. Es kann eine Curve Maxima und Minima haben, die hier als Ordinaten anzusehen sind. Y;
2. Sind die Maxima und Minima möglich, so müssen ihnen mögliche Werthe entsprechen.
3. Folgen mehrere Y von einerley Zeichen aufeinander, so sind deren eine ungrade Zahl und wenigstens 3.
   Nur die beiden ersten und letzten Y sind davon ausgenommen:
   a.) die beiden ersten YY (immer), wenn sie positiv sind, oder negativ; je nachdem der Exponent der Gleichung gerade oder ungerade ist.
   b.) die beiden letzten YY immer, wenn sie positiv sind.
4. Stellt man bey Gleichungen für die Maxima und Minima wenn der Exponent grade ist, noch ein +, wenn er ungradeist noch ein − Zeichen, und hängt in jedem Fall noch ein + Zeichen an: so entsteht das Schema:

I für einen graden Exponenten:

$+ \mp \pm \mp \pm \ldots\ldots \mp \pm \mp +$

II für einen ungeraden Exponenten:

$- \pm \mp \pm \mp \pm \mp \ldots\ldots \pm \mp \pm \mp +$

und der allgemeine Satz: Wenn mehrere gleiche Zeichen aufeinander folgen, indem man die vorgelegte Gleichung der YY gegen dieses Schema hält, so kann ihre Anzahl nur ungrade und nicht kleiner als 3 seyn. Jeder Folge entspricht eine unmögliche Wurzel.

5. a bedeute die Anzahl der positiven, b die Anzahl der negativen Zeichen, u die Anzahl der unmögl. Wurzeln

und n die Anzahl der möglichen Fälle (aus a positiven und b negativen Zeichen): so wird man n Werthe für $\mathfrak{n}$ haben, unter denen jedoch nur Einer wirklich Statt finden kann.

6. Es ist also ein Criterium nöthig, nach welchem alle möglichen Fälle, die nicht Statt finden, ausgeschlossen werden.

7. Dieses Criterium setzt eine Abscissenlinie voraus, welche die Curve dergestalt schneidet, daß die Endpuncte i Fig. 1 der $q$ten, $(q+3)$ten .... überh. der $(q+3k)$ten y entweder regelmäßig abwechselnd zuerst oberhalb und dann unterhalb derselben fallen, oder umgekehrt, oder bey einigen Paaren das Eine bey andern das Andere Statt findet.

8. Es kommt alles an auf die Bestimmung dieser Ordnung $\mathfrak{N}$; denn die Anzahl der Folgen und Abwechslungen der y, und zugleich der imaginären Wurzeln, wird durch a b $\mathfrak{N}$ völlig bestimmt.

9. Es ist also die Frage: in welcher Ordnung sind die Puncte i vertheilt? d.h. wie läßt sich $\mathfrak{N}$ bestimmen?


D
E
g
A
K

Cottillon.



142.

